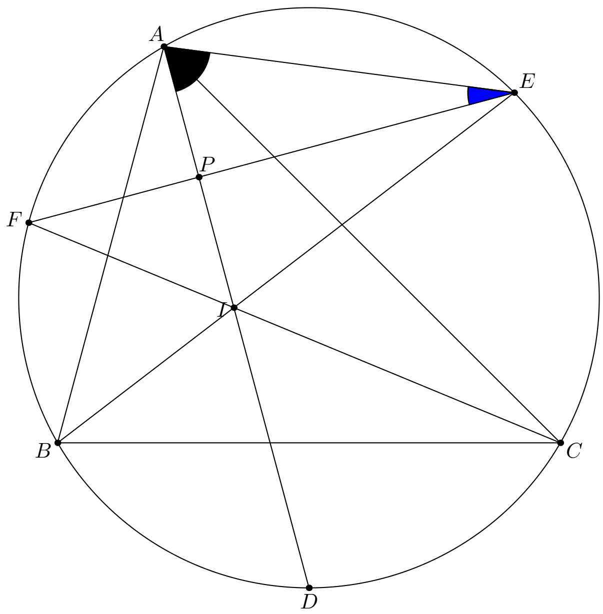
Lukion matematiikkakilpailu 7.2.2003

Ratkaisuehdotelma

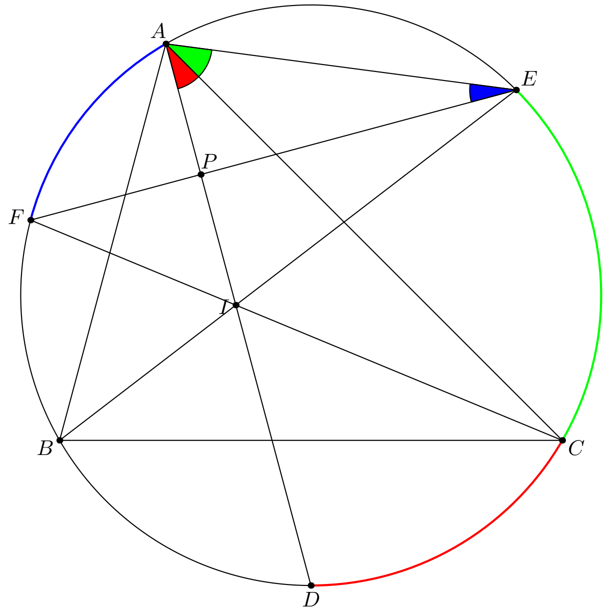
1. *Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Puolisuorat AI, BI ja CI leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteissä D, E ja F. Todista, että AD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vasten.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea kulmia kehäkulmalauseen ja kulmanpuolittajien avulla.

Olkoon P janojen AD ja EF leikkauspiste. Haluamme osoittaa, että kolmio APE on suorakulmainen kolmio. Tätä varten riittää osoittaa, että kulmien $\angle EPA$ ja $\angle AEP$ summa on $90°$.



Mietitään kulmia vastaavia kolmion ABC ympärysympyrän kaaria. Nämä on merkitty alla olevaan kuvaan. Kulma $\angle AEF$ vastaa kaarta $\widehat{AF}$, ja kaari $\angle DAE$ vastaa kaarta $\widehat{DE}$, jonka voi jakaa kahdeksi kaareksi $\widehat{DC}$ ja $\widehat{CE}$.



Yhdessä nämä kaaret vastaavat puolta kolmion ABC ympärysympyrästä. Nimittäin sininen kaari $\widehat{AF}$ vastaa kulmaa $\angle ACF$, joka on puolet kulmasta $\angle ACB$, jota vastaa kaari $\widehat{AB}$. Siis $\widehat{AF}$ on puolet kaaresta $\widehat{AB}$. Vastaavasti $\widehat{DC}$ on puolet kaaresta $\widehat{BC}$ ja $\widehat{CE}$ on puolet kaaresta $\widehat{AC}$. Väite seuraa.

Kommentti. Ratkaisun voi tietysti myös muotoilla kaarien pituuksien sijasta kulmien avulla. Samalla päättelyllä saadaan, että

$$\angle AEF = \frac{1}{2}\angle ACB,\ \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAC \text{ ja } \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CBA,$$

mistä summaamalla saadaan haluttu väite.

2. *Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä on lausekkeen*

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \ldots + \frac{1}{x_{2001}+1} + \frac{1}{x_{2002}+1}$$

arvo, kun $x_1 = 1/3$ *ja* $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$*?*

Ratkaisu. Idea on kirjoittaa summa teleskooppisummaksi.

Koska $x_n^2 + x_n = x_n(x_n+1)$, niin

$$\frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

eli

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

ja siten

$$\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\ldots+\frac{1}{x_{2002}+1}\\
&=\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x_{2002}}-\frac{1}{x_{2003}}\right)\\
&=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2003}}\\
&=3-\frac{1}{x_{2003}}.
\end{aligned}$$

Jonon ensimmäiset jäsenet ovat $x_1 = 1/3$,

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{9},\\
x_3 &= \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}+1\right)=\frac{52}{81},\\
x_4 &= \frac{52}{81}\left(\frac{52}{81}+1\right)=\frac{6916}{6561}>1.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että myös x_{2003} on suurempi kuin 1, eli $0 < \frac{1}{x_{2003}} < 1$. Tehtävän summan arvon on siis lukujen 2 ja 3 välissä.

Kommentti. Päästyään vauhtiin lukujono (x_n) kasvaa hyvin nopeasti. Koska $x_4 > 1$, niin $x_5 = x_4(x_4+1) > 2$, $x_6 > 6, x_7 > 42$, $x_8 > 42 \cdot 43 > 1600$ ja $x_9 > 1600^2$. Täten laskemalla summasta muutaman ensimmäisen termin saa hyvän veikkauksen siitä, paljonko koko summan arvo on.

3. *Pöydällä on kuuden eri ihmisten tyhjät kukkarot. Kuinka monella tavalla niihin voidaan sijottaa* 12 *kahden euron kolikkoa niin, että korkeintaan yksi jää tyhjäksi?*

Vastaus. Tapoja on 2442 kappaletta.

Ratkaisu. Tunnetusti tapa sijoittaa m keskenään samanlaista esinettä n:ään lokeroon on $\binom{m+n-1}{n-1}$ (ks. kommentti).

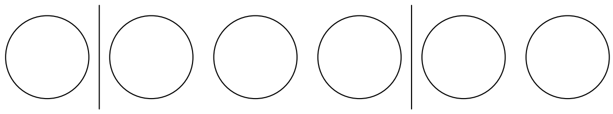
Tapoja sijoittaa kolikot kukkaroihin niin, että joka kukkarossa on ainakin yksi kolikko, on siten $\binom{6+5}{5}$. Tällaiset sijoittelut voidaan nimittäin tehdä niin, että laitetaan jokaiseen kukkaroon yksi kolikko ja siten sijoitetaan loput 6 kolikkoa mielivaltaisesti.

Sijoittelut, joissa tasan yksi kukkaro jää tyhjäksi, voidaan tehdä niin, että valitaan tyhjäksi jäävä kukkaro (6 eri mahdollisuutta), sijoitetaan muihin viiteen kukkaroon yksi kolikko kuhunkin, ja sitten seitsemän kolikkoa näihin viiteen kukkaroon mielivaltaisesti. Näitä sijoitteluja on siis $6 \cdot \binom{7+4}{4}$.

Eri sijoitteluja on siis kaikkiaan

$$\binom{11}{5}+6\binom{11}{4}=\frac{11!}{4!\cdot 6!}\left(\frac{1}{5}+\frac{6}{7}\right)=37\cdot 11\cdot 6=2442.$$

Kommentti. Perustelu ratkaisun alun väitteelle. Jakoja voi hahmottaa seuraavasti: laitetaan pöydälle m esinettä ja jaetaan ne $n-1$ seinämällä n lokeroksi.



$m = 6$ esinettä jaettu $n = 3$ lokeroon, joista ensimmäisessä on 1, toisessa 3 ja kolmannessa 2 esinettä.

Kussakin jaossa pöydällä on $m + n - 1$ esinettä, ja jaon määrää $n - 1$ seinämän sijainnit. Jakotapoja on siis $\binom{m+n-1}{n-1}$.

4. *Etsi ne positiivisten kokonaislukujen parit* (n, k), *joille*

$$(n + 1)^k - 1 = n!.$$

Vastaus. Ratkaisut ovat

$$(n, k) = (1, 1), (2, 1), (4, 2).$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ensiksi todistaa $n + 1$:n olevan alkuluku ja sitten tutkia vasemman ja oikean puolen jaollisuutta luvulla n^2.

Olkoon n jokin tehtävän yhtälön toteuttava luku. Jos p on luvun $n + 1$ alkutekijä, on se myös luvun $n! + 1$ tekijä. Mutta mikään $p \le n$ ei ole tekijänä luvussa $n! + 1$. On siis oltava $p = n + 1$, eli $n + 1$ on alkuluku.

Tutkitaan sitten pienet tapaukset.

- Jos $n + 1 = 2$, niin $n = 1$ ja $2^k - 1 = 1$. On oltava $k = 1$. Pari $(n, k) = (1, 1)$ on siis ratkaisu.
- Jos $n + 1 = 3$, saadaan samoin $3^k - 1 = 2$ ja $k = 1$. Pari $(n, k) = (2, 1)$ on myös ratkaisu.
- Jos $n + 1 = 5$, $5^k - 1 = 24$, joten $(n, k) = (4, 2)$ on ratkaisu.

Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Jos (n, k) olisi tällainen ratkaisu, niin $n + 1$ olisi alkuluku ja vähintään 7, joten olisi $n = 2m, m > 2$. Koska $2 \le n - 1$ ja $m \le n - 1$, niin $n = 2m$ on luvun $(n - 1)!$ tekijä. Näin ollen $n!$ olisi jaollinen luvulla n^2. Siis myös

$$(n + 1)^k - 1 = n^k + kn^{k-1} + \ldots + \frac{k(k-1)}{2}n^2 + kn$$

olisi jaollinen luvlla n^2. Mutta silloin k olisi jaollinen n:llä ja erityisesti $k \ge n$. Tämä ei käy, koska nyt yhtälön vasen puoli on suurempi kuin oikea:

$$(n + 1)^k - 1 > n^k \ge n^n > n!.$$

5. *Pelaajat Aino ja Eino valitsevat vuorotellen eri lukuja joukosta* $\{0, 1, \ldots, n\}$, *missä* $n \in \mathbb{N}$ *on ennalta kiinnitetty luku. Peli päättyy, kun jommankumman pelaajan* *luvuista voi valita neljä, jotka sopivassa järjestyksessä muodostavat aritmeettisen jonon. Pelin voittaa pelaaja, jonka luvuista tällaisen jonon voi muodostaa. Osoita, että on olemassa sellainen n, että aloittajalla on voittostrategia.*

Ratkaisu. Osoitetaan, että aloittajalla on voittostrategia kun $n = 100$. Olkoon aloittaja A ja toisena pelaava B.

A:n strategia on ensiksi valita luku 50. Voidaan olettaa (symmetrian vuoksi), että B:n seuraavana valitsema luku on alle 50. Tutkitaan kahta tapausta sen mukaan, kuinka suuri B:n valitsema luku on.

Tapaus 1. B valitse luvun, joka on enintään 45.

Tällöin A valitsee seuraavaksi luvun 52, tavoitteena muodostaa jokin jonoista $(46, 48, 50, 52)$, $(48, 50, 52, 54)$ tai $(50, 52, 54, 56)$. Tämän estämiseksi B:n on pakko valita jompikumpi luvuista 48 ja 54. Valitsi B kumman tahansa näistä luvuista, A valitsee seuraavalla vuorollaan luvun 51, ja saa neljännellä vuorollaan muodostettua jommankumman jonoista $(49, 50, 51, 52)$ ja $(50, 51, 52, 53)$.

Tapaus 2. B valitsee jonkin luvuista $46, 47, 48, 49$.

Idea on samankaltainen kuin tapauksessa 1. A valitsee luvun 60, tavoitteena muodostaa jokin nelikoista $(30, 40, 50, 60), (40, 50, 60, 70), (50, 60, 70, 80)$. Taas B:n tulee tämän estämiseksi valita jompikumpi luvuista 40 ja 70, ja A vastaa valitsemalla luvun 55, ja saa siten muodostettua toisen nelikoista $(45, 50, 55, 60)$ ja $(50, 55, 60, 65)$.

Kommentti. Selvästikin on myös pienempiä n:n arvoja, joilla aloittajalla on voittostrategia (esitetty ratkaisu on melko suurpiirteinen). Voidaan osoittaa, että arvolla $n = 14$ aloittajalla on voittostrategia, mutta arvolla $n = 13$ toisena pelaava pystyy pakottamaan tasapelin.