Lukion matematiikkakilpailu 6.2.2004

Ratkaisuehdotelma

1. *Yhtälöillä*

$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \text{ ja } x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

on kummallakin kaksi erisuurta reaalista ratkaisua. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä

$$x^2 + 2cx + a^2 = 0?$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia toisen asteen yhtälöiden reaalisten ratkaisujen määriä polynomien diskriminanttien kautta.

Toisen asteen yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua silloin ja vain silloin, kun yhtälön diskriminantti on positiivinen. Siis

$$4a^2 - 4b^2 > 0 \text{ ja } 4b^2 - 4c^2 > 0.$$

Täten yhtälön $x^2 + 2cx + a^2 = 0$ diskriminantti

$$4c^2 - 4a^2 = 4c^2 - 4b^2 + 4b^2 - 4a^2$$

on kahden negatiivisen luvun summana negatiivinen. Yhtälöllä $x^2 + 2cx + a^2 = 0$ ei siis ole reaalisia ratkaisuja.

2. *Luvut a, b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja, joilla*

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$$

on rationaaliluku. Osoita, että

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

on kokonaisluku.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on johtaa annetusta ehdosta tieto $b^2 = ac$ ja tämän avulla sieventää jälkimmäistä lauseketta.

Koska $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku, $b\sqrt{3} - c \neq 0$. Voidaan siis laventaa:

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c} = \frac{(a\sqrt{3} + b)(b\sqrt{3} - c)}{3b^2 - c^2} = \frac{3ab - bc + (b^2 - ac)\sqrt{3}}{3b^2 - c^2}.$$

Tämä luku on rationaaliluku, joten $b^2 - ac = 0$.

Tehtävän viimeistelemisen voi hoitaa kahdella eri tavalla.

1. tapa. Huomataan tekijöihinjako

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + b^2) \\ &= (a + b + c)^2 - 2b(a + c + b) \\ &= (a + b + c)(a - b + c). \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = a-b+c,$$

eli erityisesti $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$ on kokonaisluku.

2. tapa. Koska $b^2 = ac$, pätee $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, eli a, b ja c muodostavat geometrisen lukujonon. Merkitään $b = ar$ ja $c = ar^2$. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} &= \frac{a^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r+r^2)} \\ &= a\frac{(r^6-1)/(r^2-1)}{(r^3-1)/(r-1)} \\ &= a\frac{(r^6-1)(r-1)}{(r^3-1)(r^2-1)}.\end{aligned}$$

Käytetään näille muuttujan r polynomeille tekijöihinjakoja $r^6-1 = (r^3-1)(r^3+1)$ ja $r^3+1 = (r+1)(r^2-r+1)$ ja $r^2-1 = (r-1)(r+1)$, joilla lauseke sievenee muotoon

$$a(r^2-r+1).$$

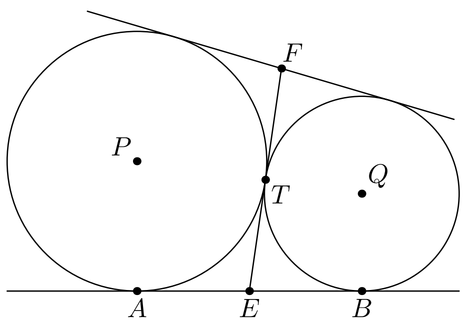
Koska $b = ar$ ja $c = ar^2$, on tämän lausekkeen arvo $c-b+a$ eli kokonaisluku.

3. *Ympyrät, joiden säteet ovat r ja R, sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Kuinka pitkän janan ympyröiden sivuamispisteiden kautta kulkevasta ympyröiden yhteisestä tangentista erottavat ympyröiden kaksi muuta yhteistä tangenttia?*

Vastaus. Kysytty pituus on $\sqrt{4Rr}$.

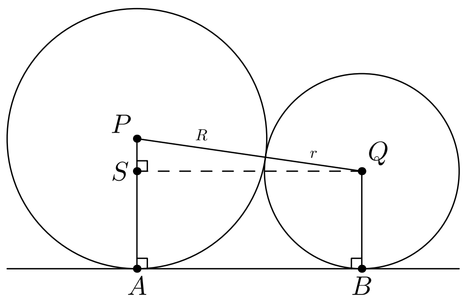
Ratkaisu. Ratkaisun idea on hyödyntää tangenteista saatavia yhtä suuria pituuksia ja Pythagoraan lausetta.

Oletetaan, että $R \geq r$. Alla on piirretty kuva tilanteesta. Haluamme laskea janan EF pituuden.



Symmetrian nojalla $EF = 2ET$. Koska EA, ET ja EB ovat tangentteja kuvan ympyröille, pätee $EA = ET = EB$. Siis EF on kaksi kertaa jana ET, ja ET on puolet janasta AB, joten $EF = AB$.

Lasketaan siis janan AB pituus. Tätä varten tutkitaan seuraavaa kuviota ja sen apupistettä S, joka on valittu niin, että $ABQS$ on suorakulmio.



Selvästikin $SQ = AB$, $PS = R - r$ ja $PQ = R + r$, joten Pythagoraan lause kolmioon PQS antaa

$$|SQ|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr.$$

Täten $SQ = AB = \sqrt{4Rr}$, eli vastaus tehtävään on $\sqrt{4Rr}$.

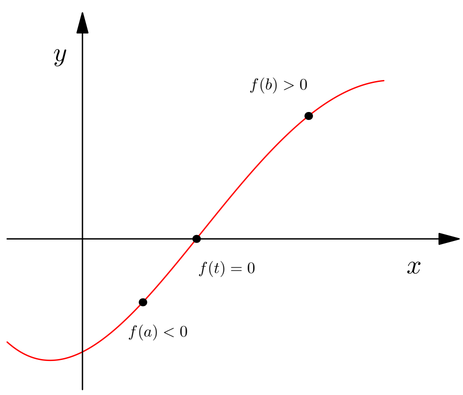
4. *Luvut* $2005! + 2$, $2005! + 3, \dots, 2005! + 2005$ *muoodstavat* 2004*:n peräkkäisen kokonaisluvun jonon, jossa ei ole yhtään alkulukua. Onko olemassa jokin* 2004*:n peräkkäisen kokonaisluvun jono, jossa on tasan* 12 *alkulukua?*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia, miten alkulukujen määrä 2004 peräkkäisen kokonaisluvun jonossa muuttuu, kun lukuja kasvatetaan yhdellä.

Verrataan alkulukujen määrää jonoissa $a, a+1, \dots, a+2003$ ja $a+1, a+2, \dots, a+2004$. Jos molemmat luvut a ja $a+2004$ ovat alkulukuja tai yhdistettyjä lukuja, jonoissa on yhtä monta alkulukua. Jos luvuista a ja $a+2004$ tasan toinen on alkuluku, jonoissa olevien alkulukujen määrä eroaa tasan yhdellä. Siis näissä jonoissa olevien alkulukujen määrä eroaa aina enintään yhdellä.

Jonossa $1, 2, \dots, 2004$ on enemmän kuin 12 alkulukua (ainakin 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ja 41). Koska jonossa $a, a+1, \dots, a+2003$ ei ole yhtään alkulukua, kun $a = 2005! + 2$, on jollain b, $1 < b < a$ oltava jono $b, b+1, \dots, b+2003$, jossa on tasan 12 alkulukua.

Kommentti. Eräs lukiossa käsiteltävä analyysin tulos kuuluu seuraavasti: jos $f(x)$ on jatkuva funktio (esimerkiksi polynomi), ja joillakin reaaliluvuilla $a < b$ pätee $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin on olemassa jokin $a < t < b$ jolla $f(t) = 0$. Siis funktio ei voi "hypätä" x-akselin yli.



Tämän tehtävän ratkaisu perustui samankaltaiseen ideaan: jos on annettu lukujono $x_1, x_2, \ldots$, jolla $|x_k - x_{k+1}| \leq 1$ kaikilla k ja jolla on olemassa kokonaisluvut $n < m$ niin, että $x_n > 12$ ja $x_m < 12$, niin jollakin t pätee $x_t = 12$. Siis lukujono $x_1, x_2, \ldots$ ei voi "hypätä" arvon 12 yli. (Tehtävässä x_i on alkulukujen määrä jonossa $i, i+1, \ldots, i+2003$.)

5. *Valtakunnassa otetaan käyttöön uusi rahayksikkö, markka, joka jakautuu sataan penniin. Eri kolikkoarvoja otetaan käyttöön vain kolme. Mitkä kolikkoarvot olisi valittava, jotta mikä tahansa markkaa pienempi ostos voitaisiin maksaa tasarahalla kukkarosta, jossa on mahdollisimman vähän kolikkoja?*

Vastaus. On valittava arvot $(1, 4, 20)$, $(1, 5, 20)$ tai $(1, 5, 25)$. (Kukkarossa on oltava vähintään 11 kolikkoa, ja näillä ja vain näillä valinnoilla 11 kolikkoa riittää.)

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia mahdollisten kolikkoyhdistelmien määriä ja tätä kautta rajata kolikoiden määrää. Tutkimalla arvioiden yhtäsuuruustapausta saadaan määritettyä, mitkä ovat kolikoiden arvot.

On selvää, että yksi kolikkolaji on yhden pennin kolikko. Olkoot muut arvot a ja b penniä, $a < b$. Oletetaan, että mikä tahansa enintään 99 pennin summa voidaan maksaa enintään x:llä pennin, y:llä a:n pennin ja z:lla b:n pennin kolikolla.

Kukkaron kolikoilla voidaan maksaa enintään $(x+1)(y+1)(z+1)$ eri rahasummaa. Summan nimittäin määrää se, montako pennin, a pennin ja b pennin kolikkoa valitaan. Pennin kolikoiden määrälle on $x+1$ vaihtoehtoa. Vastaavasti a pennin on kolikoille $y+1$ ja b pennin kolikoille on $z+1$ vaihtoehtoa.

Koska kukin rahasummista $0, 1, 2, \ldots, 99$ saadaan esitettyä (0 vastaa sitä, että kutakin kolikkoa valitaan nolla kappaletta), pätee

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq 100.$$

Alaraja lukujen tulolle antaa alarajan myös lukujen summalle: aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)}{3} \geq \sqrt[3]{100}.$$

Arvioidaan luvun 100 kuutiojuurta: koska esimerkiksi $4{,}5^3 = 4{,}5 \cdot 20{,}25 < 100$, niin $\sqrt[3]{99} > 4{,}5$. Täten $x+y+z > 3 \cdot 4{,}5 - 3 = 10{,}5$. Koska $x+y+z$ on kokonaisluku, on

$$x+y+z \geq 11.$$

Käymällä tapaukset läpi huomataan, että tapauksessa $x+y+z = 11$ tulee päteä $(x, y, z) = (4, 4, 3), (4, 3, 4)$ tai $(3, 4, 4)$, ja näillä kolmikoilla pätee $(x+1)(y+1)(z+1) = 100$.

Tutkitaan ensin tapausta $(x, y, z) = (4, 4, 3)$. Koska $(x+1)(y+1)(z+1) = 100$, tulee jokainen rahasummista $0, 1, \ldots, 99$ muodostaa täsmälleen yhdellä tavalla. Jotta rahasumma 5 saadaan muodostettua vain yhdellä tavalla, tulee olla $a = 5$, ja jotta rahasumma 25 saadaan muodostettua vain yhdellä tavalla, tulee olla $b = 25$. Huomataankin, että $(a, b) = (5, 25)$ on ratkaisu.

Tapaukset $(x, y, z) = (4, 3, 4)$ ja $(3, 4, 4)$ saadaan käsiteltyä vastaavasti, mistä päästään alussa esitettyyn vastaukseen.