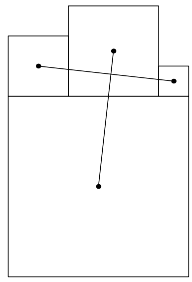
Lukion matematiikkakilpailu 2005

Loppukilpailut tehtävien ratkaisuja

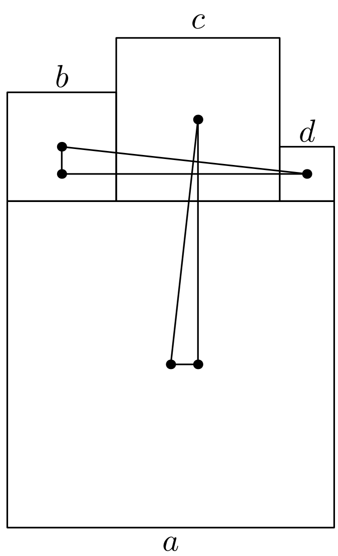
1. Oheisessa kuviossa on neljän neliön keskipisteet yhdistetty kahdella janalla. Osoita, että nämä kaksi janaa ovat kotisuorassa toisiaan vastaan.



Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia kuvion pituuksia ja löytää yhdenmuotoiset kolmiot.

Olkoon ison neliön sivu a ja pienten, vasemmalta oikealle, b, c ja d. Silloin $b+c+d = a$. Oletetaan, että $b \geq d$.

Laskemista varten tädennetään kuvioon neliöiden keskipisteitä yhdistävät janat hypotenuusina suorakulmaiset kolmiot, joiden kateetit ovat neliöiden sivujen suuntaiset.



Avainidea on, että nämä kaksi suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoiset. Todistetaan tämä.

“Vaakasuoran” kolmion pystysuoran ja vaakasuoran kateetinn suhde on

$$\frac{\frac{b-d}{2}}{\frac{b}{2}+c+\frac{d}{2}} = \frac{b-d}{a+c}.$$

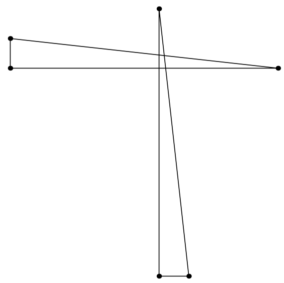
“Pystysuoran” kolmion lyhemmän ja pitemmän kateetin suhde puolestaan on

$$\frac{b+\frac{c}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{c}{2}+\frac{a}{2}}=\frac{2b+c-a}{a+c}=\frac{b-d}{a+c}.$$

Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset.

Vaakasuoran kolmion hypotenuusa on samassa kulmassa vaakatasoon nähden kuin mitä pystysuoran kolmion hypotenuusa on pystysuoraan nähden, eli hypotenuusat ovat kohtisuorassa.

(Tässä pitää tosin olla hieman varovainen: jos tilanne olisi alla olevan kuvan mukainen, missä pystysuora kolmio on peilattu pidemmän kateettinsa ylin, ei hypotenuusat olisi kohtisuorassa.



Mutta koska $b \geq d$, on vaakasuoran kolmion hypotenuusa laskeva (tai vaakasuora) ja pystysuoran kolmion hypotenuusa nouseva (tai pystysuora), ei tätä tilannetta ilmene.)

2. Ravintolan pyöreän pöydän ääressä on 12 istumapaikkaa. Paikalle saapuu viiden naisen ja seitsemän miehen seurue. Kuinka monesta erilaisesta istumajärjestyksestä he voivat valita, kun jokaisella naisella tulee olla molemmilla puolillaan mies ja kahta istumajärjestystä pidetään erilaisina, jos ainakin yhdellä henkilöllä on näissä järjestyksissä oikealla puolellaan istumassa eri henkilö?

Vastaus. Istumajärjestyksiä on $6! \cdot \binom{7}{5} \cdot 5! = 1814400$.

Ratkaisu. Voidaan ajatella, että pöydän ympärillä on alkuun seitsemän tuolia. Sen jälkeen kun ensimmäinen mies on istunut yhdelle näistä, voivat muut kuusi istua muille tuoleille $6! = 720$ eri järjestykseen. Tuolien väleissä on 7 rakoa. Niistä viisi voidaan valita $\binom{7}{5} = 21$ eri tavalla naisten tuolien paikoiksi. Jokaista miesten istumajärjestystä ja jokaista rakojen valintaa kohden on $5! = 120$ erilaista naisten istumajärjestystä. Erilaisia järjestyksiä on siis $720 \cdot 21 \cdot 120 = 1814400$.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (x+y)^3 &= z \\ (y+z)^3 &= x \\ (z+x)^3 &= y \end{cases}$$

Vastaus. Yhtälöryhmällä on kolme ratkaisua, nimittäin kolmikot

$$(x,y,z) = (0,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \text{ ja } \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right).$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on pystyttää epäyhtälöitä sen osoittamiseksi, että $x = y = z$.

Olkoon (x, y, z) yhtälöryhmän ratkaisu. Symmetrian takia voidaan olettaa, että $x \leq y \leq z$. Koska $t \mapsto t^3$ on kasvava funktio (eli jos $a \leq b$, niin $a^3 \leq b^3$), niin $z = (x + y)^3 \leq (y + z)^3 = x$. Siis $z = x = y$.

Luku x toteuttaa yhtälön $(2x)^3 = x$, joten on oltava $x = 0$ tai $x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$. Selvästi nämä myös käyvät ratkaisuiksi.

4. Luvun kymmenjärjestelmäesityksessä esiintyvät numerot 1, 3, 7 ja 9. Osoita, että luvun numeroiden järjestystä muuttamalla saadaan aikaan 7:llä jaollinen luku.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ensiksi tarkistaa tilanne nelinumeroisen luvun tapauksessa ja hyödyntää tätä yleisen tapauksen todistuksessa.

Kokeilemalla löydetään, että lukujen $1379, 1793, 3719, 1739, 1397, 1937, 1973$ jakojäännökset seitsemällä jaettaessa ovat $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja 6, mikä ratkaisee ongelman neljän luvun tapauksessa.

Tutkitaan yleistä tapausta. Otetaan tarkasteltavan luvun neljäksi viimeiseksi numeroksi $1, 3, 7, 9$. Luku on siis $a + 1397$. Jos a:n jakojäännös seitsemällä jaettaessa on b, järjestetään viimeiset numerot $1, 3, 7$ ja 9 luvuksi c, jonka jakojäännös seitsemällä jaettaessa on $7 - b$. (Edellisen kappaleen nojalla tämä onnistuu.) Luku $a + c$ on seitsemällä jaollinen ja sen numerot ovat samat kuin alkuperäisen luvun.

5. Sanotaan äärellisen jonon olevan *sekaisin*, jos minkään eri jäsenten keskiarvo ei koskaan ole jonossa näiden välissä. Esim. jono (0,2,1) on sekaisin, sillä $1 = \frac{0+2}{2}$ ei ole lukujen 0 ja 2 välissä sekä muut keskiarvot $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{2+1}{2} = 1\frac{1}{2}$ eivät edes esiinny jonossa. Todista, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sekaisin oleva jono, joka luettelee toistotta luvut $0,1,\ldots,n$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on muodostaa lyhyempien sekaisin olevien jonojen avulla pidempiä sekaisin olevia jonoja. Esimerkiksi lähdettäessä sekaisin olevasta jonosta $(0, 2, 1, 3)$ saadaan pidempi sekaisin oleva jono kertomalla jonon luvut kahdella (saadaan jono $(0, 4, 2, 6)$), lisäämällä tämän jonon lukuihin 1 (saadaan jono $(1, 5, 3, 7)$) ja laittamalla nämä jonot peräkkäin: nyt

$$(0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7)$$

on tuplasti pidempi sekaisin oleva jono. Uuden jonon sekaisuus perustuu siihen, että toisella puolella ovat parilliset luvut ja toisella puolella parittomat (ja siihen että lähdimme sekaisin olevasta jonosta).

Tarkka todistus on esitetty alla.

Osoitetaan induktiolla luvun n suhteen, että on olemassa sekaisin oleva jono, joka luettelee luvut $0, 1, \ldots, n$. Tapaukset $n = 0$ ja $n = 1$ ovat selviä (valitaan jono (0) ja $(0, 1)$).

Suoritetaan sitten induktioaskel. Oletetaan, että kaikilla arvoilla $n < 2k$ on olemassa lukua n vastaava sekaisin oleva jono. Osoitetaan, että tällöin on myös lukua $n = 2k$ ja $n = 2k + 1$ vastaavat sekaisin olevat jonot. Väite seuraa tämän jälkeen induktiolla.

Koska $k < 2k$, on olemassa sekaisin oleva jono $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, joka luettelee joukon $\{0, 1, \ldots, k\}$ toistoitta. Määritellään jono

$$(b_0, b_1, \ldots, b_{2k+1}) = (2a_0, \ldots, 2a_k, 2a_0 + 1, \ldots, 2a_k + 1),$$

eli

$$b_i = \begin{cases} 2a_i & \text{kun } i \leq k \\ 2a_i + 1, & \text{kun } i > k. \end{cases}$$

Jonon ensimmäiset $k+1$ alkiota luettelevat joukon $\{0, 2, \ldots, 2k\}$ ja viimeiset $k+1$ alkiota joukon $\{1, 3, \ldots, 2k+1\}$. Jono $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$ luettelee siis joukon $\{0, 1, \ldots, 2k+1\}$.

Osoitetaan, että jono on sekaisin. Tarkastellaan kahta jonon alkiota b_i ja b_j. Jos toinen näistä on parillinen ja toinen pariton, niin niiden keskiarvo ei ole kokonaisluku eikä siis esiinny jonossa. Jos b_i ja b_j ovat parillisia, mutta niiden keskiarvo on pariton, niin b_i ja b_j ovat jonon alkupuolikkaassa ja keskiarvo loppupuolikkaassa, eikä siis b_i:n ja b_j:n välissä. Jos b_i ja b_j sekä $\frac{b_i+b_j}{2}$ ovat parillisia, niin

$$\frac{b_i + b_j}{2} = \frac{2a_i + 2a_j}{2} = 2 \cdot \frac{a_i + a_j}{2} = 2a_m = b_m.$$

Koska jono $(a_0, \ldots, a_k)$ on sekaisin, a_m ei ole a_i:n ja a_j:n vläissä. Koska jonon $(a_0, \ldots, a_k)$ järjestys on sama kuin jonon $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$:n ensimmäisen puoliskon, ei b_m ole b_i:n ja b_j:n välissä. Samoin käsitellään tapaus, jossa b_i, b_j ja $\frac{b_i+b_j}{2}$ ovat kaikki parittomia.

Jos sekaisin olevasta jonosta poistetaan alkio, jää jäljelle sekaisin oleva jono. Joukon $\{0, 1, \ldots, 2k\}$ luetteleva sekaisin oleva jono saadaan jonosta $(b_0, \ldots, b_{2k+1})$ poistamalla siitä luku $2k + 1$.