Lukion matematiikkakilpailu 2006

Loppukilpailutehtävien ratkaisuhahmotelmia

1. Määritä kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (x,y), joille

$$x + y + xy = 2006.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa vasen puoli tulomuotoon $(x+1)(y+1)-1$.

Koska $(x+1)(y+1) = x+y+xy+1$, tehtävän yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$(x+1)(y+1) = 2007$$

kanssa.

Etsitään sitten luvun 2007 alkutekijähajotelma. Koska numeroiden summa $2+0+0+7=9$ on jaollinen yhdeksällä, 2007 on jaollinen yhdeksällä: $2007 = 9 \cdot 223$. Luku 223 ei ole jaollinen kahdella, kolmella eikä viidellä. Kokeilemalla huomaa, että 223 ei ole jaollinen 7:llä, 11:llä eikä 13:lla. Koska $15^2 = 225 > 223$, suurempia mahdollisia tekijöitä ei tarvitse tutkia; 223 on alkuluku. Siis luvun 2007 alkutekijähajotelma on

$$2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223.$$

Koska on oltava $x+1 \geq 2$ ja $y+1 \geq 2$, on oltava joko

$$\begin{cases} x+1 = 9, \\ y+1 = 223 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 223, \\ y+1 = 9 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 3, \\ y+1 = 669 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 669, \\ y+1 = 3. \end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaisut $(x,y) = (8,222), (222,8), (2,668)$ ja $(668,2)$. Selvästi kaikki saadut lukuparit ovat alkuperäisen yhtälön ratkaisuja.

Kommentti. Ideaa lausekkeen $xy + x + y$ jakamisesta tekijöihin voi soveltaa yleisesti lausekkeisiin muotoa $axy + bx + cy$: pätee

$$axy + bx + cy = a\left(x + \frac{c}{a}\right)\left(y + \frac{b}{a}\right) + d$$

jollakin vakiolla d (nimittäin $d = -bc/a$). Tämä on "neliöksi täydentämisen" variantti kahdelle muuttujalle.

2. Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla a pätee

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia lausekkeiden erotusta ja jakaa se tekijöihin (hyödyntäen tietoa siitä, että $a = 1$ on nollakohta).

Lasketaan epäyhtälön vasemman ja oikean puolen erotus:

$$\begin{aligned} 3(1+a^2+a^4) - (1+a+a^2)^2 &= (3 + 3a^2 + 3a^4) - (1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3) \\ &= 2a^4 - 2a^3 - 2a + 2. \end{aligned}$$

Jaetaan tämä tekijöihin. Huomataan nollakohta $a = 1$, mistä saadaan

$$2(a^4 - a^3 - a + 1) = 2(a - 1)(a^3 - 1).$$

Termin $a^3 - 1$ saa edelleen jaettua tekijöihin, joista yksi on $a - 1$. Saadaan

$$2(a - 1)^2(a^2 + a + 1).$$

Tehtävän ratkaisemista varten riittää siis enää osoittaa, että $a^2 + a + 1$ on aina vähintään nolla. Tämän voi perustella esimerkiksi sillä, että diskriminantti -3 on negatiivinen, tai täydentämällä neliön $a^2 + a + 1 = (a + 1/2)^2 + 3/4$.

3. Luvut p, $4p^2 + 1$ ja $6p^2 + 1$ ovat alkulukuja. Määritä p.

Vastaus. Vain $p = 5$ toteuttaa annetun ehdon.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia lukujen jakojäännöksiä viidellä jaettaessa eli tutkia lukuja modulo 5.

Huomataan, että $p = 5$ on ratkaisu: 5, $4 \cdot 5^2 + 1 = 101$ ja $6 \cdot 5^2 + 1 = 151$ ovat kaikki alkulukuja.

Oletetaan sitten, että p ei ole 5. Erityisesti p ei ole jaollinen viidellä, eli p on joko $1, 2, 3$ tai $4 \pmod 5$. Käydään tapaukset läpi. Tapauksien läpikäyntiin käytetään kongruenssien laskusääntöjä.

- Jos $p \equiv 1 \pmod 5$, niin

  $$4p^2 + 1 \equiv 4 \cdot 1^1 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod 5,$$

  eli $4p^2 + 1$ on jaollinen viidellä. Koska $4p^2 + 1 > 5$, ei $4p^2 + 1$ täten ole alkuluku.
- Jos $p \equiv 2 \pmod 5$, niin

  $$6p^2 + 1 \equiv 6 \cdot 2^2 + 1 = 25 \equiv 0 \pmod 5,$$

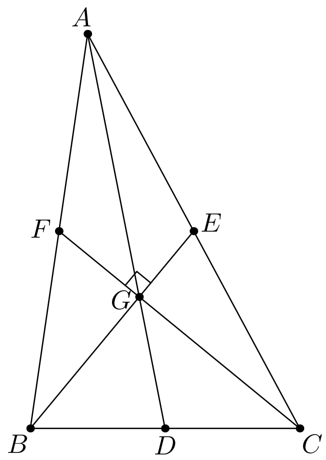
  eli $6p^2 + 1$ on jaollinen viidellä. Koska $6p^2 + 1 > 5$, ei $6p^2 + 1$ täten ole alkuluku.
- Jos $p \equiv 3 \pmod 5$, niin taas lasketaan, että $6p^2 + 1$ on jaollinen viidellä, mikä ei käy.
- Jos $p \equiv 4 \pmod 5$, niin taas lasketaan, että $4p^2 + 1$ on jaollinen viidellä, mikä ei käy.

Kommentti. Ratkaisun voi muotoilla myös ilman kongruensseja kirjoittamalla luvun p jakoyhtälön avulla muodossa $p = 5a + b$, missä $0 \leq b < 5$ on jakojäännös kun p jaetaan viidellä ja a on jaon kokonaisosa. Idea on kuitenkin sama, eli ideana on tutkia luvun p jakojäännöksiä viidellä jaettaessa.

4. Kolmion kaksi keskijanaa ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Todista, että kolmion keskijanat ovat erään suorakulmaisen kolmion sivut.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on hyödyntää yhdenmuotoisuutta, yhtä pitkiä pituuksia ja Pythagoraan lausetta.

Oletetaan, että kolmion ABC keskijanat ovat AD, BE ja CF ja että $BE \perp CF$. Keskijanojen leikkauspiste on G.



Avainhuomiot:

1. Koska BGC on suorakulmainen kolmio ja D on janan BC keskipiste, niin D on kolmion BGC ympärysympyrän keskipiste (vrt. Thaleen lause ja kehäkulmalause). Erityisesti DG on yhtä pitkä kuin BD ja DC.

2. Painopiste G jakaa mediaanit AD, BE ja CF osiin, joiden pituuksien suhde on $2:1$ (tunnettu tulos, seuraa hyödyntämällä yhtä pitkistä pituuksista saatavia yhdenmuotoisia kolmioita).

Hyödynnetään näitä huomiota. Pythagoraan lause kolmioon BCG antaa

$$BG^2 + CG^2 = BC^2.$$

Tässä BG on pituudeltaan $2/3$ mediaanista BE ja samoin CG on $2/3$ mediaanista CF. Lisäksi hyödyntämällä ensimmäistä huomiota todetaan, että BC on tuplasti pituus DG, joka on kolmasosa mediaanista AD. Siis BC on $2/3$ mediaanista AD. Yhtälön voi siis kirjoittaa muotoon

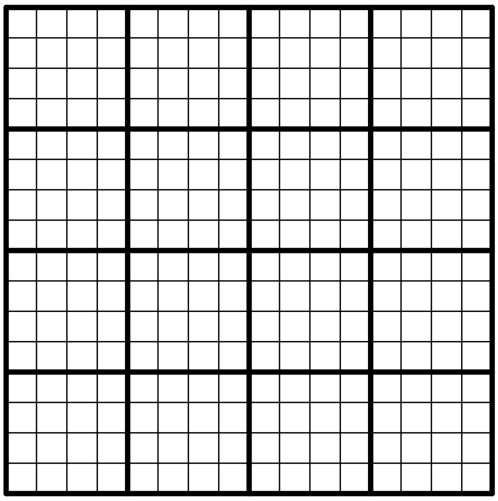
$$\left(\frac{2}{3}BE\right)^2 + \left(\frac{2}{3}CF\right)^2 = \left(\frac{2}{3}AD\right)^2,$$

mistä sieventämällä saadaan

$$BE^2 + CF^2 = AD^2,$$

mistä väite seuraa Pythagoraan lauseella.

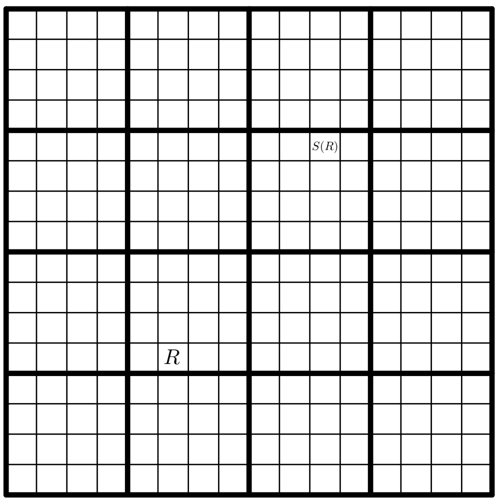
5. Kuvan 16×16-ruudukolla pelataan Nelipe-peliä seuraavasti: Kaksi pelaajaa kirjoittaa vuoroin ruudukon eri ruutuihin kokonaislukuja $1, 2, \ldots 16$. Luku pitää valita niin, ettei mikään luku toistu millään rivillä, sarakkeella eikä missään kuvan 16 pikkuneliössä. Pelin häviää ensimmäinen, joka ei voi siirtää. Kumpi pelaajista voittaa, aloittaja vai toinen pelaaja, kun pelaajat pelaavat parhaalla mahdollisella tavalla?



Vastaus. Toinen pelaaja voittaa.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on symmetria. Toisena pelaava voittaa kirjoittamalla aina keskipisteeseen nähden symmetriseen ruutuun saman luvun kuin aloittaja.

Oletetaan, että pelaajat ovat A ja B ja että A kirjoittaa ensimmäisen numeron. Merkitään $S(R)$:llä ruutua, joka on symmetrinen ruudun R kanssa kuvion keskipisteen suhteen. Pelaaja B voittaa aina, jos B käyttää seuraavaa strategiaa: kun A on kirjoittanut ruutuun R luvun n, niin B kirjoittaa ruutuun $S(R)$ luvun n.



Perustellaan tarkasti, että B todella voi pelata näin. Kunhan olemme tarkistaneet tämän, niin on selvää, että B voittaa: koska laudan ruutujen määrä on parillinen, niin ei voi koskaan tulla vastaan tilannetta, jossa A on tehnyt siirron ja B ei voisi tehdä siirtoa.

Tarkistetaan siis, että B voi pelata näin. Ensinnäkin A:n ensimmäisen siirron jälkeen $S(R)$ on varmasti vapaa, ja jokaista A:n siirtoa edeltäneet siirrot ovat aina varanneet jonkin ruutuparin $R, S(R)$, joten A:n viimeinen siirto on tehty sellaiseen ruutuun R_k, jolle $S(R_k)$ on vapaa. Koska neliössä on parillinen määrä rivejä, $S(R_k)$:n vaaka- ja pystyrivin ruudut ovat R_k:n vaaka- ja pystyrivin ruutujen kanssa symmetrisiä. Myös se 4×4 -pikkuneliö, johon $S(R_k)$ kuuluu, koostuu R_k:n pikkuneliön kanssa symmetrisistä neliöistä. Ennen A:n viimeistä siirtoa R_k:n ja $S(R_k)$:n vaaka- ja pystyriveillä sekä pikkuneliöissä on samat luvut. Jos A voi kirjoittaa R_k:hon luvun n_k, voi B siis myös kirjoittaa $S(R_k)$:hon luvun n_k.