Lukion matematiikkakilpailu 2.2.2007

Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että kun alkuluku jaetaan* 30*:llä, jakojäännös on joko* 1 *tai alkuluku. Päteekö samanlainen väite, kun jakaja on* 60 *tai* 90*?*

Vastaus. Samanlainen väite ei päde luvuilla 60 tai 90.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on käsitellä erikseen alkuluvut $p \leq 5$ ja $p > 5$.

Tietysti alkulukujen $2, 3$ ja 5 jakojäännökset 30:llä jaettaessa ovat alkulukuja. Jos p on lukua 5 suurempi alkuluku, se ei ole parillinen eikä kolmella tai viidellä jaollinen, joten sen jakojäännös luvulla $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ jaettaessa ei ole jaollinen kahdella, kolmella eikä viidellä. Mahdollisista jakojäännöksistä $0, 1, 2, \ldots, 29$ tämän ehdon toteuttavat jakojäännökset $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$, joista kaikki ykköstä suuremmat ovat alkulukuja. Siis p:n jakojäännös luvulla 30 jaettaessa on 1 tai alkuluku.

Vastaava väite ei päde luvuilla 60 ja 90. Luvulle 60 vastaesimerkiksi käy 109, joka on alkuluku mutta jonka jakojäännös luvulla 60 jaettaessa on yhdistetty luku 49. Vastaavasti luvulle 90 kelpaa vastaesimerkiksi $139 = 90 + 49$.

Kommentti. On mahdollista osoittaa, että 30 on suurin luku, jolla on tehtävänannon mukainen ominaisuus. (Lukija voi halutessaan miettiä, millä kaikilla lukua 30 pienemmillä luvuilla on tämä ominaisuus.)

2. *Määritä yhtälön*

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

Vastaus. Yhtälöllä ei ole yhtäkään reaalista ratkaisua.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tehdä luvun x koosta erilaisia riippuen arvioita sen osoittamiseksi, että yhtälön vasen puoli on postiivinen.

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta funktiolla $f(x)$.

Nähdään heti, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \leq 0$. Jos $x \geq 1$, niin $x^k \geq x^{k-1}$, joten $f(x) > 0$, kun $x \geq 1$.

Vaikein tapaus on $0 < x < 1$. Tätä varten kirjoitetaan $f(x)$ muotoon

$$f(x) = -x(1-x)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x) + \frac{5}{2}. \tag{1}$$

Pätee $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (paraabelin $x(1-x)$ suurin arvo saavutetaan nollakohtien puolivälissä). Koska $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x < 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, kun $0 < x < 1$, nähdään, että $f(x) > 0$ myös tässä tapauksessa.

Siis $f(x) > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x.

Kommentti. Esityksen (1) voi keksiä seuraavasti. Jotta saamme osoitettua $f(x) > 0$, tulee osoittaa että

$$g(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x$$

on vähintään $-5/2$, eli että $g(x)$ ei ole "kovin negatiivinen". Jos x on lähellä nollaa, niin kukin g:n termeistä on lähellä nollaa ja $g(x)$ on suunnilleen nolla. Samoin jos x on lähellä ykköstä, niin peräkkäiset termit kumoavat toisiaan ja $g(x)$ on suunnilleen nolla.

Nämä huomiot saa formalisoitua toteamalla, että 0 ja 1 ovat g:n nollakohtia. Täten $g(x)$ on jaollinen polynomeilla x ja $x-1$, ja saadaankin

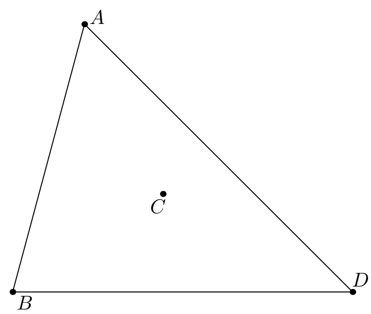
$$\begin{aligned} g(x) &= x(x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 4x - 4) \\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4). \end{aligned}$$

(Kun x on lähellä nollaa, ensimmäinen tulontekijä on suunnilleen nolla ja $g(x)$ on tämän johdosta suunnilleen nolla, ja vastaavasti kun x on lähellä ykköstä on $g(x)$ toisen tulontekijän johdosta suunnilleen nolla.) Tämä antaa yhtälön (1).

3. *Tasossa on viisi pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että jotkin neljä näistä pisteistä ovat kuperan nelikulmion kärkiä.*

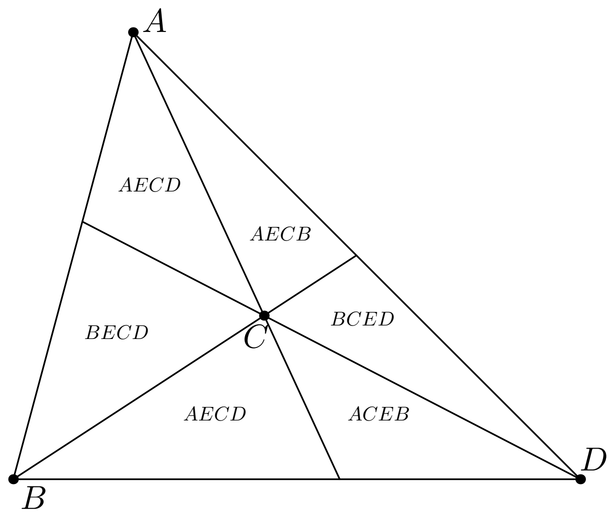
Ratkaisu. Ratkaisun idea on lähteä neljän pisteen asetelmasta ja miettiä, mihin viidennen pisteen pitäisi sijoittua, jotta kuperaa nelikulmiota ei syntyisi.

Nimetään pisteet (mielivaltaisesti) kirjaimin A, B, C, D ja E. Jos pisteistä A, B, C ja D saa muodostettua kuperan nelikulmion kärjet, niin olemme valmiit. Oletetaan että näin ei ole. Siis yksi pisteistä A, B, C ja D on muiden kolmen pisteen muodostaman kolmion sisäpuolella. Oletetaan (symmetriaan nojautuen), että piste C on kolmion ABD sisällä.

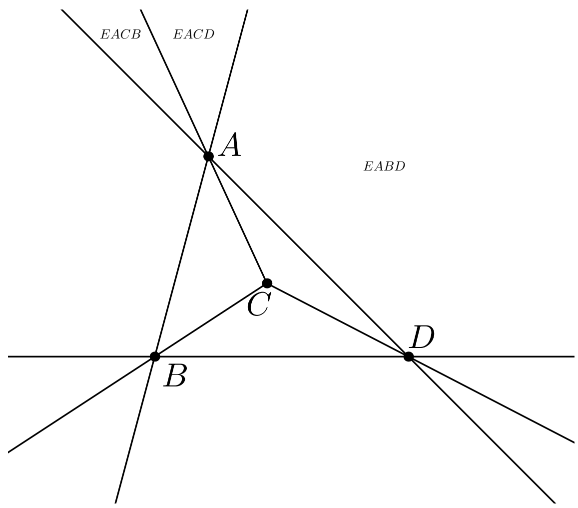


Kysymys kuuluu: missä piste E voi sijaita?

Tutkitaan ensiksi tapausta, jossa E on kolmion ABD sisällä. Idea on, että pisteiden A, B, C ja D väliset suorat jakavat kolmion alueisiin ja se, mihin alueeseen E osuu, määrää mitkä neljä pisteistä muodostavat kuperan nelikulmion kärjet.



Tapaus jossa E on kolmion ABD ulkopuolella on samanlainen. Kuvaan on nimetty kolmessa tapauksessa muodostuneen kuperan nelikulmion nimi – muut tapaukset ovat symmetrisiä.



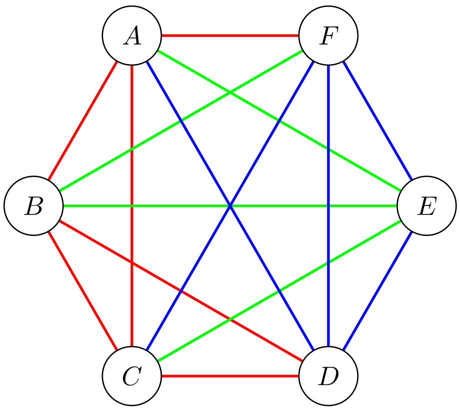
Siis pisteen E sijainnista riippumatta muodostuu kupera nelikulmio.

4. Salavaaran kaupunkiin rakennetaan kuuden viraston välille pikoteknologiaa käyttävä tietoliikenneverkko niin, että aina kahden viraston välillä on suora kaapeliyhteys. Verkon rakentaminen kilpailutetaan kolmen operaattorin välillä siten, että kukin yhteys kilpailutetaan erikseen. Kun verkko on rakennettu, huomataan, että eri operaattorien järjestelmät eivät olekaan keskenään yhteensopivia. Kaupunki joutuu hylkäämään siksi kahden operaattorin rakentamat yhteydet, missä nämä hylättävät operaattorit valitaan niin, että vahinko on mahdollisimman pieni. Kuinka moni virasto vähintään voi olla keskenään yhteydessä, mahdollisesti monen yhteyden kautta, kun tilanne oli alun perin pahin mahdollinen?

Vastaus. Pahimmassa mahdollisessa tilanteessa saadaan neljä virastoa olemaan yhteydessä saman operaattorin linjoilla.

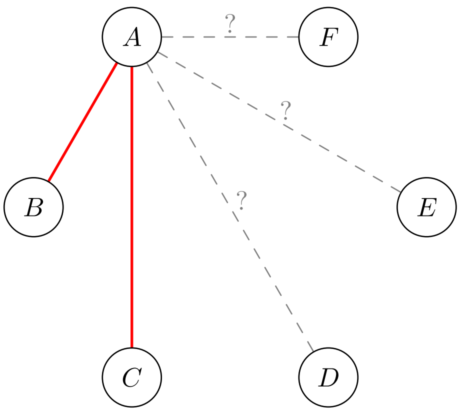
Ratkaisu. Ratkaisun idea on tulkita tilannetta verkkojen kautta ja tutkia tapauksia sopivasti sen osoittamiseksi, että joka tilanteesta löytyy neljä saman operaattorin yhdistämää virastoa.

Tulkitaan tilannetta *verkkona*. Olkoot virastot A, B, C, D, E ja F. Olkoot operaattorit Punainen, Sininen ja Vihreä. Alla oleva kuva havainnollistaa yhtä mahdollista tilannetta.

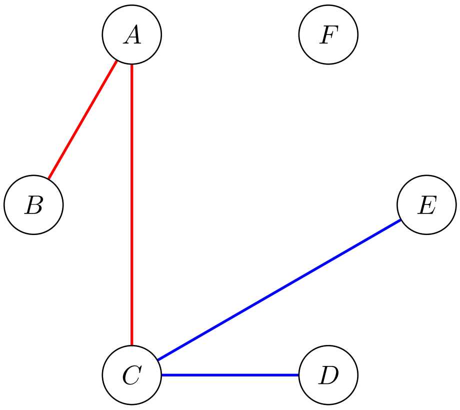


Osoitetaan ensiksi, että on olemassa vähintään yksi operaattori, jonka linjoilla on ainakin neljä virastoa.

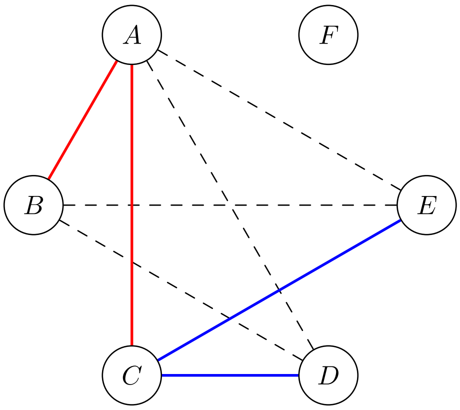
Tehdään vastaoletus: enintään kolme virastoa voi olla tällä tavalla keskenään yhteydessä. Koska A on yhdistetty kaikkiin viiteen muuhun virastoon, se on yhdistetty ainakin kahteen muuhun, esimerkiksi B:hen ja C:hen, saman operaattorin, esimerkiksi Punaisen, toimesta.



Jos C on yhdistetty johonkin virastoista D, E ja F Punaisen toimesta, syntyy ainakin neljän viraston yhteys. Oletetaan siis, että nämä kolme yhteyttä ovat Sinisen tai Vihreän yhteyksiä. Kolmesta yhteydestä ainakin kaksi on saman operaattorin yhteyksiä, joten voidaan olettaa, että C on yhdistetty D:hen ja E:hen Sinisen toimesta.

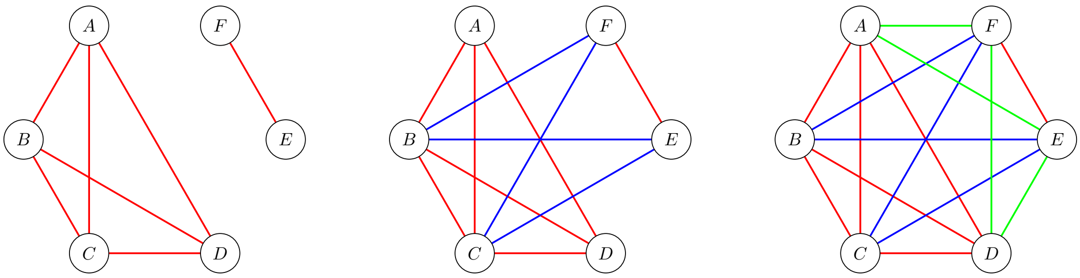


Jos mikä hyvänsä yhteyksistä AD, AE, BD ja BE on Punaisen tai Sinisen yhteys, löytyy neljä virastoa jotka ovat saman operaattorin yhdistämiä ja olemme valmiit.



Voidaan siis olettaa, että nämä kaikki yhteydet ovat Vihreän yhteyksiä. Täten A, B, D ja E ovat neljä virastoa jotka ovat saman operaattorin yhdistämiä.

Vielä pitää antaa esimerkki tilanteesta, jossa mikään operaattori ei yhdistä yli neljää virastoa toisiinsa. Yhdistetään Punaisen toimesta virastoista A, B, C ja D kaikki toisiinsa, ja lisäksi otetaan yhteys EF Punaisen haltuun. (Ideana on muodostaa niin monta Punaisen yhteystä kuin mahdollista ilman, että mitkään viisi virastoa ovat yhteydessä.) Yhdistetään sitten Sinisellä virastoista B, C, E, F kaikki toisiinsa (paitsi jo yhdistetyt parit) ja Vihreällä loput virastoparit virastojen A, F, E ja D välillä.



5. *Osoita, että on olemassa sellainen kokonaislukukertoiminen polynomi $P(x)$, että yhtälöllä $P(x) = 0$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, mutta jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n on olemassa $x \in \mathbb{Z}$, jolle $n \mid P(x)$.*

Ratkaisu. Ratkaisussa valitaan $P(x) = (2x-1)(3x-1)$. Ideana on, että kun n on annettu, valitaan x niin että $3x-1$ "ottaa vastuun" n:n alkutekijähajotelman kakkosista ja $2x-1$ ottaa vastuun n:n muista alkutekijöistä. Ratkaisu hyödyntää kongruenssien ominaisuuksia ja kiinalaista jäännöslausetta tällaisen x löytämiseksi.

Olkoon siis n positiivinen kokonaisluku ja pyritään valitsemaan kokonaisluku x niin, että $P(x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x-1)(3x-1)$ on jaollinen luvulla n. Kirjoitetaan $n = 2^a \cdot m$, missä m on jokin pariton luku ja $a \geq 0$ on kakkosen eksponentti n:n alkutekijähajotelmassa.

Pyritään valitsemaan x niin, että $2x-1$ on jaollinen luvulla m ja $3x-1$ on jaollinen luvulla 2^a. Koska $\text{syt}(2, m) = 1$, tunnetusti yhtälöllä

$$2x \equiv 1 \pmod m$$

on ratkaisu, eli on olemassa kokonaisluku r jolla yhtälön toteuttavat ne luvut x, joilla

$$x \equiv r \pmod m.$$

Vastaavasti koska $\text{syt}(3, 2^a) = 1$, yhtälöllä

$$3x \equiv 1 \pmod{2^a}$$

on ratkaisu, eli on olemassa kokonaisluku s jolla tämän yhtälön toteuttavat ne luvut x, joilla

$$x \equiv s \pmod{2^a}.$$

Koska $\text{syt}(m, 2^a) = 1$, kiinalaisen jäännöslauseen nojalla on olemassa sellainen kokonaisluku x, joka toteuttaa molemmat yhtälöistä

$$x \equiv r \pmod m, \quad x \equiv s \pmod{2^a}$$

samanaikaisesti. Tällainen kokonaisluku x on sellainen, jolla n jakaa luvun $P(x)$.

Kommentti. On hyvä idea valita polynomi $P(x)$ eri polynomien tuloksi: tällöin on helpompaa löytää kokonaislukuja x, joilla $P(x)$ on jaollinen annetulla n.

On myös olemassa kuvatunlaisia polynomeja $P(x)$, joilla yhtälöllä $P(x) = 0$ ei ole edes rationaalilukuratkaisuja. Tällaisten polynomien konstruointi ja toimivuuden osoittaminen on kuitenkin vaikeampaa.