Lukion matematiikkakilpailu 2008

Loppukilpailutehtävien ratkaisuja

1. *Suureen jänisjahtiin osallistui kettuja, susia ja karhuja. Metsästäjiä oli 45, ja saalis oli yhteensä 2008 jänistä. Jokainen kettu pyydysti 59 jänistä, jokainen susi 41 jänistä ja jokainen karhu 40 jänistä. Montako kettua, sutta ja karhua seurueessa oli?*

Vastaus. Kettuja oli 10, susia 18 ja karhuja 17.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on muodostaa yhtälöryhmä ja tutkia sen ratkaisuja.

Merkitään kettujen, susien ja karhujen määriä muuttujilla x, y ja z. Tällöin x, y ja z ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja ne toteuttavat yhtälöparin

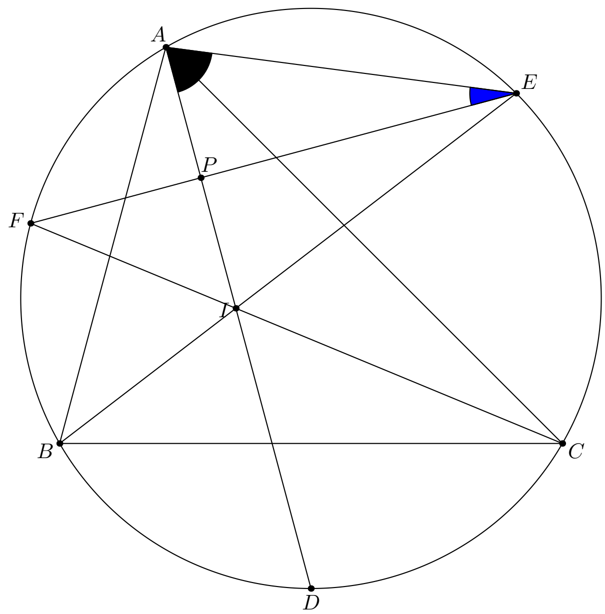
$$\begin{cases} 59x + 41y + 40z & = 2008 \\ x + y + z & = 45. \end{cases}$$

Kun ryhmästä eliminoidaan z (kertomalla alempi yhtälö luvulla 40 ja vähentämällä saatu yhtälö ensimmäisestä), tullaan välttämättömään ehtoon $19x + y = 208$. Koska $0 \le y \le 45$, on $163 \le 19x \le 208$. Koska $8 \cdot 19 = 152$ ja $11 \cdot 19 = 209$, ainoat mahdolliset x:n arvot ovat $x = 9$ ja $x = 10$. Jos $x = 9$, on $y = 37$ ja $z = 45 - 9 - 37 = -1$. Siis $x = 10, y = 18$ ja $z = 17$ on ainoa mahdollisuus. Helposti nähdään, että tämä kolmikko toteuttaa tehtävän ehdot.

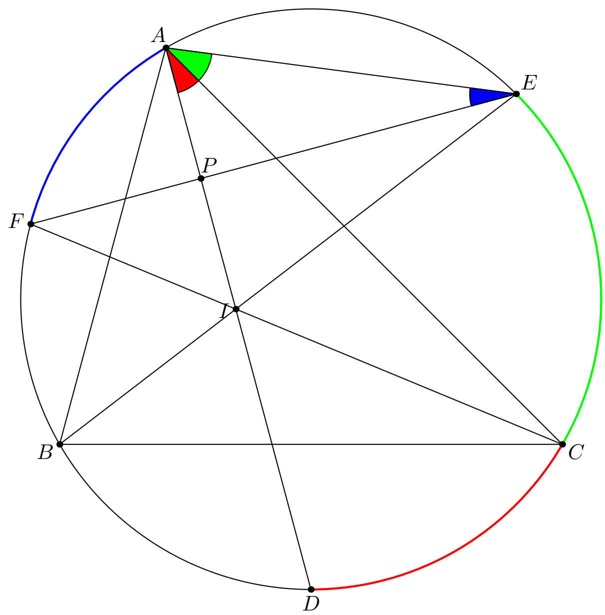
2. *Kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I. Suorat AI, BI ja CI leikkaavat kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän myös pisteissä D, E ja F (tässä järjestyksessä). Osoita, että AD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea kulmia kehäkulmalauseen ja kulmanpuolittajien avulla.

Olkoon P janojen AD ja EF leikkauspiste. Haluamme osoittaa, että kolmio APE on suorakulmainen kolmio. Tätä varten riittää osoittaa, että kulmien $\angle EPA$ ja $\angle AEP$ summa on $90°$.



Mietitään kulmia vastaavia kolmion ABC ympärysympyrän kaaria. Nämä on merkitty alla olevaan kuvaan. Kulma $\angle AEF$ vastaa kaarta $\widehat{AF}$, ja kaari $\angle DAE$ vastaa kaarta $\widehat{DE}$, jonka voi jakaa kahdeksi kaareksi $\widehat{DC}$ ja $\widehat{CE}$.



Yhdessä nämä kaaret vastaavat puolta kolmion ABC ympärysympyrästä. Nimittäin sininen kaari $\widehat{AF}$ vastaa kulmaa $\angle ACF$, joka on puolet kulmasta $\angle ACB$, jota vastaa kaari $\widehat{AB}$. Siis $\widehat{AF}$ on puolet kaaresta $\widehat{AB}$. Vastaavasti $\widehat{DC}$ on puolet kaaresta $\widehat{BC}$ ja $\widehat{CE}$ on puolet kaaresta $\widehat{AC}$. Väite seuraa.

Kommentti. Ratkaisun voi tietysti myös muotoilla kaarien pituuksien sijasta kulmien avulla. Samalla päättelyllä saadaan, että

$$\angle AEF = \frac{1}{2}\angle ACB,\ \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAC \text{ ja } \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CBA,$$

mistä summaamalla saadaan haluttu väite.

3. *Ratkaise Diofantoksen yhtälö*

$$x^{2008} - y^{2008} = 2^{2009}.$$

(Diofantoksen yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan yhtälön kokonaislukuratkaisujen määrittämistä.)

Vastaus. Yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisuja.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on jakaa yhtälön vasen puoli tekijöihin ja tutkia lukujen jaollisuuksia.

Esitämme kaksi ratkaisua.

1. ratkaisu. Yhtälön vasen puoli on kahden neliön erotus. Jakamalla vasen puoli tekijöihin saadaan yhtälö

$$(x^{1004} + y^{1004})(x^{1004} - y^{1004}) = 2^{2009}.$$

Yhtälön vasemman puolen molemmat tulontekijät ovat luvun 2 potensseja. Siis on olemassa kokonaisluku $0 \leq p \leq 2009$, jolla

$$\begin{cases} x^{1004} + y^{1004} & = 2^p \\ x^{1004} - y^{1004} & = 2^{2009-p}, \end{cases}$$

Summaamalla yhtälöt saadaan

$$2x^{1004} = 2^p + 2^{2009-p}.$$

Täten $p \geq 1$ ja

$$x^{1004} = 2^{p-1} + 2^{2008-p}.$$

Luvuista $p - 1$ ja $2008 - p$ pienempi on enintään 1003. Olkoon tämä luku q. Siis

$$x^{1004} = 2^q(1 + 2^{2007-q}).$$

Jos $q > 0$, x on parillinen, ja x^{1004} on jaollinen 2^{1004}:llä. Tämä ei ole mahdollista, koska $q \leq 1003$ ja $2007 - q \geq 1$. Siis $q = 0$ on ainoa mahdollisuus. Yhtälön

$$x^{1004} = 1 + 2^{2007}$$

ratkaisuiksi eivät käy parilliset luvut eivätkä kokoluokkasyistä parittomat luvut, jotka ovat ≥ 5. Myöskään $x = 3$ ei käy, esimerkiksi koska

$$3^{1004} = 81^{251} < 128^{251} = 2^{1757} < 2^{2007} + 1.$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja.

2. ratkaisu. Kuten ensimmäisessä ratkaisussa, jaetaan yhtälön vasen puoli tekijöihin kahden neliön erotuksena ja todetaan, että

$$x^{1004} + y^{1004} = 2^p$$

jollain kokonaisluvulla $p \geq 0$.

Jos $p \geq 2$, tutkimalla tätä yhtälöä modulo 4 huomataan, että x ja y ovat parillisia. Kirjoitetaan $x = 2a$ ja $y = 2b$, missä a ja b ovat kokonaislukuja, ja sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön $x^{2008} - y^{2008} = 2^{2009}$. Saadaan

$$a^{2008} - b^{2008} = 2.$$

Jakamalla tämän taas kahden neliön erotukseksi saadaan, että $a^{1004} + b^{1004}$ on joko 1 tai 2. Tästä seuraa, että $|a|, |b| \leq 1$. Mikään tällainen lukupari ei kuitenkaan ole yhtälön $a^{2008} - b^{2008} - 2$ ratkaisu.

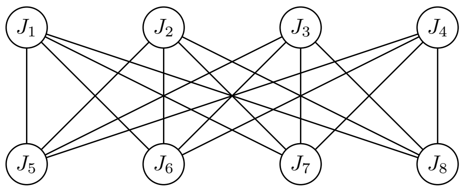
Tulee siis olla $p = 0$ tai $p = 1$, josta kuten edellä saadaan, että $|x|, |y| \leq 1$. Mikään tällainen lukupari ei kuitenkaan ole yhtälön $x^{2008} - y^{2008} = 2^{2009}$ ratkaisu.

4. *Kahdeksan jalkapallojoukkuetta pelaa otteluita niin, ettei mikään pari pelaa kahta ottelua keskenään eikä mikään joukkuekolmikko kaikkia kolmea mahdollista ottelua. Mikä on suurin mahdollinen määrä otteluita?*

Vastaus. Otteluita voi olla enimmillään 16.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia tapauksia sen mukaan, kuinka monta peliä eniten pelejä pelannut joukkue on pelannut.

Olkoot joukkueet $J_1, J_2, \ldots, J_8$. Alla on kuvattu esimerkki, jossa otteluita on 16 kappaletta. Ideana on jakaa joukkueet kahden neljän joukkueen joukkoon ja peluuttaa eri joukkojen joukkueet toisiaan vastaan. Kuvassa joukkueet on yhdistetty toisiinsa jos ne pelaavat toisiaan vastaan.



Osoitetaan sitten, ettei pelejä voi olla enempää kuin 16.

Tutkitaan joukkuetta, joka on pelannut eniten otteluita. Oletetaan symmetriaan nojautuen, että tämä joukkue on J_1. Tutkitaan tapauksia sen mukaan, montako peliä J_1 on pelannut.

Jos J_1 on pelannut 7 ottelua, eivät mitkään kaksi joukkuetta J_i ja J_k, $i, k > 1$ ole pelanneet keskenään. Otteluita on siis 7.

Jos J_1 on pelannut 6 ottelua, sanokaamme joukkueita $J_k, 2 \leq k \leq 7$, vastaan, eivät mitkään joukkueista $J_i, J_k, 2 \leq i, k \leq 7$, ole pelanneet keskenään. Joukkue J_8 on pelannut enintään 6 ottelua. Otteluita on siten enintään $6 + 6 = 12$.

Jos J_1 on pelannut 5 ottelua, joukkueita $J_k, 2 \leq k \leq 6$, vastaan, nämä joukkueet eivät ole pelanneet yhtään ottelua keskenään. Joukkueet J_7 ja J_8 ovat pelanneet enintään 5 ottelua kumpikin, joten otteluiden määrä ei ylitä 15:ttä.

Jos J_1 on pelannut 4 ottelua, mikään joukkue ei ole pelannut enempään kuin neljä ottelua. Joukkuetta kohden laskettuja on siis enintään $8 \cdot 4 = 32$, mutta kun joka ottelu tulee lasketuksi kahdesti, otteluita on enintään 16.

Jos J_1:n pelaamien otteluiden määrä on $p \leq 3$, otteluita on (kuten edellä) yhteensä enintään $4p \leq 12$.

Suurin ottelumäärä on siis 16.

Kommentti. Ratkaisu yleistyy mille tahansa määrälle joukkueita.

5. *Jana I on kokonaan peitetty äärellisellä määrällä janoja. Osoita, että näistä janoista voidaan valita osajoukko S, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(1) *millään kahdella S:ään kuuluvalla janalla ei ole yhteisiä pisteitä,*

(2) *S:ään kuuluvien janojen yhteinen pituus on enemmän kuin puolet I:n pituudesta.*

Osoita, että väite ei pidä paikkaansa, jos jana I korvataan ympyrällä ja muut sanan "jana" esiintymät sanalla "ympyränkaari".

Ratkaisu. Ratkaisun idea on käyttää induktiota ja induktion kautta palauttaa ongelma pienempään tapaukseen tai erääseen (verrattain) helppoon tapaukseen.

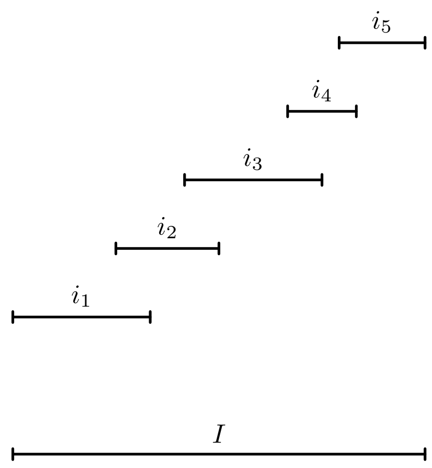
[Tehtävän muotoilu oli epäonnistunut. Jos janat ovat suljettuja, siis päätepisteet mukana, väite ei esitetyssä muodossaan ole tosi; ainoastaan vähän heikompi väite "...yhteinen pituus on vähintään puolet I:n pituudesta..." on todistettavissa. Vastaesimerkiksi kelpaa janan peittäminen kahdella janan puolikkaalla. Jos janat ovat avoimia, väite on tosi. Todistetaan alla heikompi väite suljettujen välien tapauksissa – todistus avoimille väleille perustuu samanlaisiin ideoihin.]

Todistetaan väite induktiolla janojen lukumäärän n suhteen. Jos $n = 1$, asia on selvä. Oletetaan, että väite pätee, kun janoja on n kappaletta. Olkoot $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$ $n + 1$ janaa, joiden yhdiste kokonaan peittää I:n.

Jos tässä joukossa on jokin jana i_p, jonka muut joukon janat kokonaan peittävät, niin joukko, josta i_p on poistettu, on n:n janan joukko, joka edelleen peittää koko I:n. Induktio-oletusta voidaan käyttää.

Jos tässä joukossa on kaksi janaa i_p ja i_q, joilla on yhteinen päätepiste muttei muita yhteisiä pisteitä, niin joukko, jossa i_p ja i_q on korvattu niiden yhdisteellä $i_p \cup i_q$, on joukko, joka toteuttaa induktio-oletuksen. Sillä on tehtävän mukainen osajoukko S'. Jos $i_p \cup i_q$ kuuluu tähän osajoukkoon, se voidaan purkaa takaisin osikseen i_p ja i_q, ja saadaan haluttu joukko S.

Jos kumpikaan edellä mainituista tilanteista ei toteudu, janat voidaan numeroida niin, että i_1 ja i_2, i_2 ja i_3, i_3 ja i_4 ja niin edelleen leikkaavat toisiaan, mutta i_1 ja i_3, i_2 ja i_4 ja niin edelleen eivät leikkaa toisiaan.



Nyt $i_1, i_3, i_5, \ldots$ ja $i_2, i_4, i_6, \ldots$ ovat toisiaan peittämättömistä janoista koostuvia joukkoja. Koska joukkojen yhdisteen janat peittävät koko I:n, on ainakin toisen joukon janojen yhteispituuden oltava ainakin puolet I:n pituudesta. Nämä voidaan valita joukoksi S.

Jos I:n sijalla on ympyrän kehä ja osajonojen tilalla kaaret, väite ei toteudu. Tämä nähdään esimerkiksi tapauksessa $n = 3$; kaaret, joita vastaavien keskuskulmien välit ovat esimerkiksi $[0°, 130°]$, $[120°, 250°]$ ja $[240°, 370°]$, peittävät koko ympyrän kehän, mutta mikään niistä ei yksinään peitä koko kehää ja jokaisella kahdella on yhteisiä pisteitä.