Lukion matematiikkakilpailu 6.2.2009

1. *Erään tason pisteiden lämpötila riippuu pisteestä niin, että pisteen (x, y) lämpötila on $x^2 + y^2 - 6x + 4y$. Määritä tason kylmin piste ja sen lämpötila.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on täydentää neliöksi.

Koska

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y &= (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 13 \\ &= (x-3)^2 + (y+2)^2 - 13, \end{aligned}$$

kaikkien pisteiden lämpötila on vähintään -13 ja lämpötila pisteessä $(3, -2)$ ja vain siinä on tasan -13.

2. *Polynomin P kertoimet ovat kokonaislukuja ja pätee $P(3) = 4$ ja $P(4) = 3$. Kuinka monelle kokonaisluvulle x voi olla $P(x) = x$?*

Vastaus. Tällaisia kokonaislukuja ei ole olemassa.

Ratkaisu. Esitetään kaksi ratkaisua. Ensimmäisen ratkaisun idea on tehdä parillisuustarkastelu. Toisen ratkaisun idea on käyttää polynomien jakoyhtälöä polynomiin $P(x) - x$.

1. ratkaisu. Tutkitaan polynomin $P(x)$ arvoja modulo 2. Pätee $P(3) \equiv 0 \pmod 2$ ja $P(4) \equiv 3 \pmod 2$.

Jos x on parillinen kokonaisluku, jolloin $x \equiv 4 \pmod 2$, niin kongruenssien ominaisuuksien nojalla pätee $P(x) \equiv P(4) \equiv 3 \pmod 2$. Siis $P(x)$ ja x ovat eri parillisuutta, joten $P(x) \neq x$.

Vastaavasti jos x on pariton kokonaisluku, jolloin $x \equiv 3 \pmod 2$, pätee $P(x) \equiv P(3) \equiv 4 \pmod 2$, ovat $P(x)$ ja x taas eri parillisuutta.

2. ratkaisu. Olkoon $Q(x) = P(x) - x$. Silloin $Q(3) = 4 - 3 = 1$ ja $Q(4) = 3 - 4 = -1$.

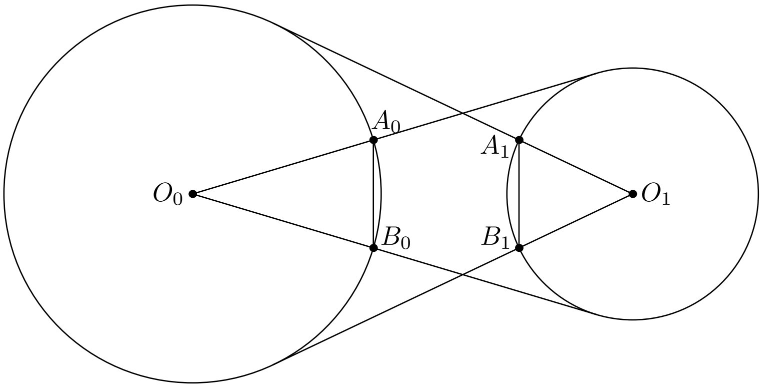
Oletetaan, että on olemassa kokonaisluku x_0, jolla $Q(x_0) = 0$. Silloin on olemassa polynomi $Q_1(x)$, jolla $Q(x) = (x - x_0)Q_1(x)$. Tämä $Q_1(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi. [Kertoimien ominaisuus on helppo nähdä, kun kirjoittaa jakoyhtälön auki.]

Nyt $1 = Q(3) = (3 - x_0)Q_1(3)$ ja $-1 = Q(4) = (4 - x_1)Q_1(4)$. Lukujen $|3 - x_0|$ ja $|4 - x_0|$ tulisi molempien olla ykkösiä, mikä selvästi on mahdotonta. Kokonaislukuja x, joille $P(x) = x$, ei siis ole olemassa.

3. Ympyrät $\mathcal{Y}_0$ ja $\mathcal{Y}_1$ sijaitsevat toistensa ulkopuolella. Ympyrän $\mathcal{Y}_0$ keskipisteestä O_0 piirretään ympyrää $\mathcal{Y}_1$ sivuavat puolisuorat, ja ympyrän $\mathcal{Y}_1$ keskipisteestä O_1 vastaavasti ympyrää $\mathcal{Y}_0$ sivuavat puolisuorat. Puolisuorat leikkaavat ympyrän $\mathcal{Y}_i$ pisteissä A_i ja B_i. Osoita, että janat A_0B_0 ja A_1B_1 ovat yhtä pitkät.

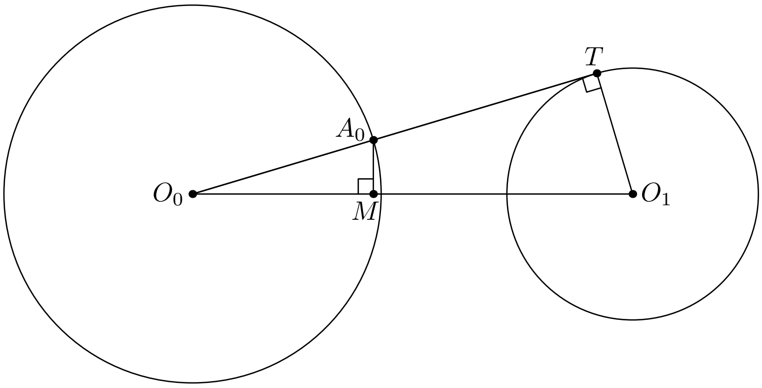
Ratkaisu. Ratkaisun idea on esittää pituudet A_0B_0 ja A_1B_1 kätevämmällä tavalla yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Alla on kuva tilanteesta.



Olkoot R ja r kuvion ympyröiden säteet.

Lasketaan pituus A_0B_0. Tämä tehdään seuraavasta kolmiosta löytyvien yhdenmuotoisten, suorakulmaisten kolmioiden kautta.



Kuviossa M on janan A_0B_0 keskipiste (joka sijaitsee janalla O_0O_1) ja T on tangentin sivuamispiste. Kolmiot O_0A_0M ja O_0O_1T ovat yhdenmuotoisia (kkk). Tätä kautta saadaan esitettyä A_0M paremmassa muodossa: pätee

$$\frac{A_0M}{O_0A_0} = \frac{TO_1}{O_0O_1}$$

eli

$$A_0M = R \cdot \frac{r}{O_0O_1}.$$

Koska A_0M on puolet janasta A_0B_0, pätee

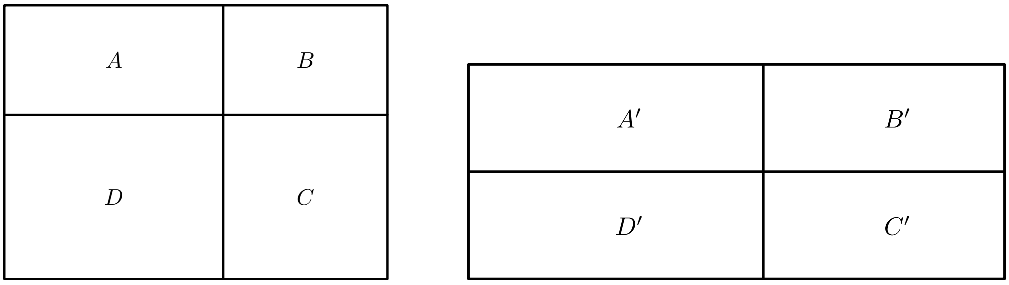
$$A_0B_0 = \frac{2Rr}{O_0O_1}.$$

Pituus riippuu siis vain ympyröiden säteistä R ja r sekä ympyröiden keskipisteiden O_0 ja O_1 etäisyydestä toisiinsa. Symmetrisesti laskemalla saadaan

$$A_1B_1 = \frac{2Rr}{O_0O_1},$$

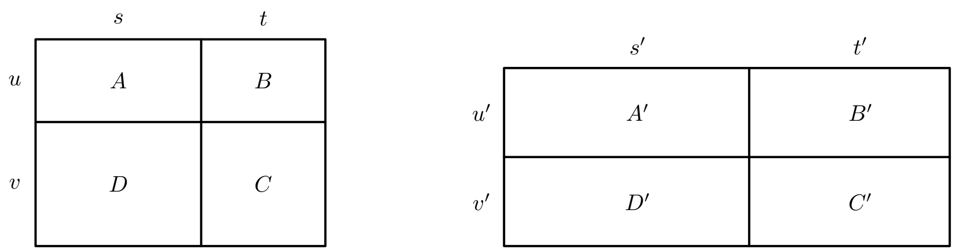
mistä seuraa $A_0B_0 = A_1B_1$.

4. *Oheisessa kuviossa vasemmanpuoleinen suorakaide on jaettu sivujen suuntaisilla janoilla neljään osaan, joiden alat ovat A, B, C ja D, skeä oikeanpuoleinen suorakaide vastaavalla tavalla osiin, joiden alat ovaþ A', B', C' ja D'. Tiedetään, että $A \leq A'$, $B \leq B'$, $C \leq C'$, mutta $D \leq B'$. Todista, että vasemmanpuoleisen suorakaiteen ala on pienempi tai yhtä suuri kuin oikeanpuoleisen eli $A+B+C+D \leq A'+B'+C'+D'$.*



Ratkaisu. Ratkaisun idea on osoittaa $B' + D' \geq B + D$ tutkimalla kuvioissa esiintyvien janojen pituuksia.

Merkitään sivuja seuraavan kaavion mukaisesti.



Merkitään lisäksi $S = A+B+C+D$ ja $S' = A'+B'+C'+D'$. Ensiksi havaitaan, että

$$B'D' = (t'u')(s'v') = (s'u')(t'v') = A'C' \geq AC = (su)(tv) = (tu)(sv) = BD.$$

Toisaalta oletuksista seuraa myös $B'-B \geq 0$ ja $B'-D \geq 0$, joten $(B'-B)(B'-D) \geq 0$ eli

$$(B')^2 - B'D - BB' + BD \geq 0.$$

Yhdistämällä huomiot saadaan

$$\begin{aligned} B'(B' - B + D' - D) &= (B')^2 - B'D' - BB' + B'D' \\ &\geq (B')^2 - B'D' - BB' + BD \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

joten koska $B' > 0$, saadaan $B' - B + D' - D \geq 0$. Siis

$$S' - S = (A' - A) + (B' - B + D' - D) + (C' - C) \geq 0,$$

eli $A' + B' + C' + D' = S' \geq S = A + B + C + D$.

5. *Kutsutaan askelpituukisen joukkoa $D \subset \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$* loistavaksi*, jos sillä on seuraava ominaisuus:*

Aina kun kokonaislukujen joukko ositetaan kahteen osaan A ja $\mathbb{Z} \setminus A$, niin ainakin toinen osista sisältää alkiot $a-d, a, a+d$ (eli $\{a-d, a, a+d\} \subset A$ tai $\{a-d, a, a+d\} \subset \mathbb{Z} \setminus A$) joillakin luvuilla $a \in \mathbb{Z}, d \in D$.

Esimerkiksi yhden alkion joukko $\{1\}$ ei ole loistava, sillä kokonaislukujen joukon voi osittaa parillisiin ja parittomiin lukuihin, eikä kumpikaan näistä osista sisällä kolmea peräkkäistä lukua.

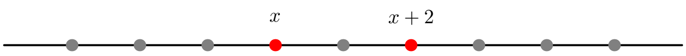
Osoita, että $\{1, 2, 3, 4\}$ on loistava mutta mikään sen aito osajoukko ei ole.

Ratkaisu. Joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ loistavuus perustellaan erilaisten tapausten tutkimisen kautta. Sen aitojen osajoukkojen epäloistavuus perustellaan (kokeilemisen kautta löytyvien) vastaesimerkkien kautta.

Toinen tapa muotoilla tehtävä: Väritämme kokonaisluvut punaisella ja sinisellä (missä punaiset luvut vastaavat joukkoa A ja siniset joukkoa $\mathbb{Z} \setminus A$). Haluamme värittää luvut niin, ettei ole olemassa kolmea samanväristä lukua, jotka muodostavat aritmeettisen lukujonon $x - d, x, x + d$, missä $d \in D$. Jos tällaista väritystä ei ole olemassa, niin D on loistava.

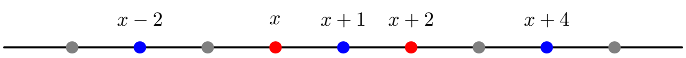
Osoitetaan ensin, että $\{1, 2, 3, 4\}$ on loistava.

Tutkitaan jotakin kokonaislukujen väritystä. Jos kaikilla kokonaisluvuilla $x \in \mathbb{Z}$ luvut x ja $x + 2$ ovat eri värisiä, niin $-4, 0$ ja 4 ovat samanvärisiä, ja olemme valmiit. Oletetaan, että näin ei ole. Voidaan siis olettaa, että on olemassa luku x niin, että x ja $x + 2$ ovat samanvärisiä (sanotaan punaisia).



Kuvassa harmaalla on pisteet, joiden väriä ei tiedetä.

Jos myös $x+1$ on punainen, niin kolmikko $x, x+1, x+2$ on halutunlainen kolmikko. Jos $x - 2$ on punainen, niin $x - 2, x, x + 2$ on halutunlainen kolmikko, ja vastaavasti jos $x + 4$ on punainen, niin $x, x + 2, x + 4$ on halutunlainen kolmikko. Voidaan siis olettaa, että nämä luvut ovat sinisiä.

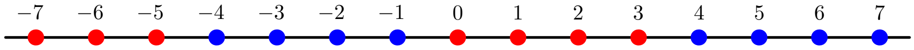


Mutta nyt $x - 2, x + 1$ ja $x + 4$ muodostavat halutunlaisen kolmikon.

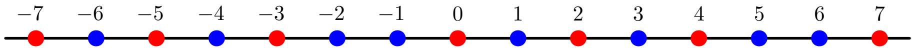
Osoitetaan sitten, ettei mikään joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ aito osajoukko ole loistava. Selvästi riittää osoittaa, että mikään kolmialkioinen osajoukko ei ole loistava, eli tutkitaan osajoukkoja $D = \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}$ ja $\{1, 2, 3\}$.

Alla olevista kuvista löytyy tavat värittää kokonaisluvut niin, ettei kolmikoita muotoa $x - d, x, x + d, d \in D$ esiinny.

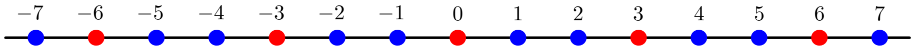
Ensimmäisessä vastaesimerkissä väritetään punaisella ne luvut, joiden jakojäännös kahdeksalla jaettaessa on $0, 1, 2$ tai 3. Toisin sanoen väritys muodostuu neljän samanvärisen kokonaisluvun ketjuista.



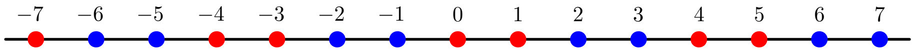
Toisessa vastaesimerkissä väritetään punaisella ne luvut, joiden jakojäännös seitsemällä jaettaessa on $0, 2$ tai 4. Väritys siis toistaa itseään seitsemän luvun jaksoissa.



Kolmannessa vastaesimerkissä väritetään punaisella kolmella jaolliset luvut.



Neljännessä vastaesimerkissä väritetään punaisella ne luvut, joiden jakojäännös neljällä jaettaessa on 0 tai 1.



Jokaisessa tapauksessa on helppo tarkistaa, ettei kiellettyjä kolmikoita löydy.