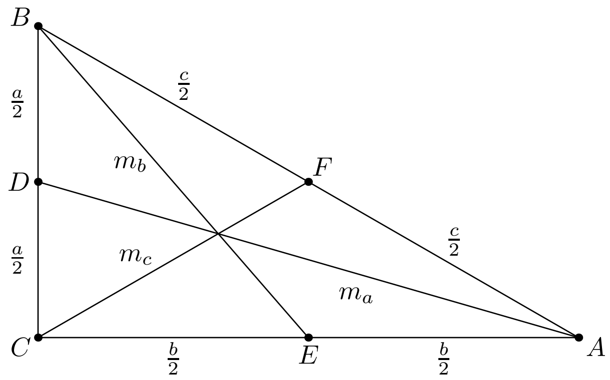
Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun tehtävien ratkaisuehdotuksia 29.1.2010

1. *Todista, että suorakulmaisen kolmion keskijanojen neliöiden summa on $\frac{3}{4}$ kolmion sivujen neliöiden summasta.*

Ratkaisu. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio ja $\angle ACB$ suora kulma, $BC = a, CA = b$ ja $AB = c$. Olkoot D, E ja F sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Olkoot vielä keskijanat $AD = m_a, BE = m_b$ ja $CF = m_c$.

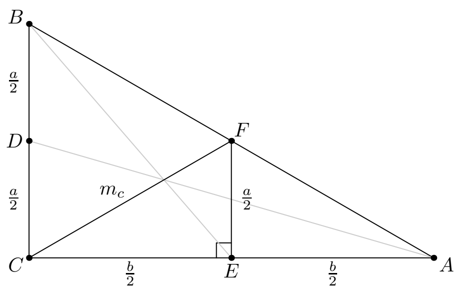


Esitämme kaksi erilaista ratkaisua. Molemmat ratkaisut laskevat mediaanien m_a, m_b ja m_c pituudet. Ensimmäinen ratkaisu käyttää Pythagoraan lausetta ja toinen suunnikaslausetta.

1. ratkaisu. Mediaanien m_a ja m_b pituudet saadaan Pythagoraan lauseella kolmioista BCE ja ACD:

$$m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4},$$
$$m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Mediaanin m_c laskemiseksi huomataan, että kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on kolmion kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet siitä. Siis $EF||BC$ ja $EF = \frac{1}{2}BC$.



Täten suorakulmaisesta kolmiosta CEF saadaan

$$m_c^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

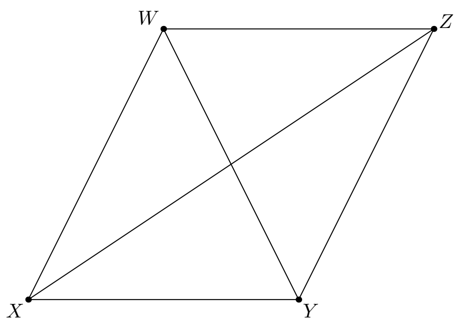
Summaamalla saadut yhtälöt saadaan

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{2}(a^2 + b^2),$$

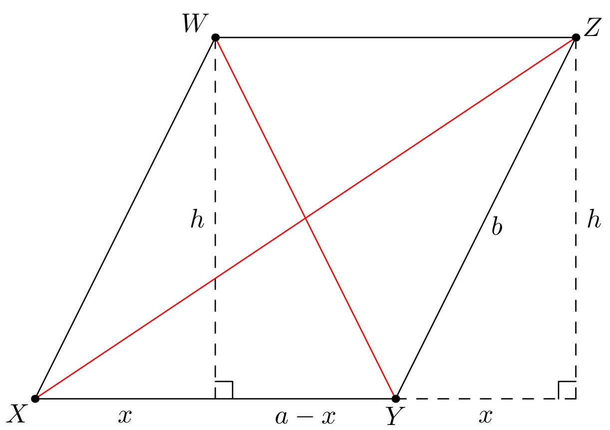
mistä väite seuraa Pythagoraan lauseen $a^2 + b^2 = c^2$ avulla:

$$\frac{3}{2}(a^2 + b^2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

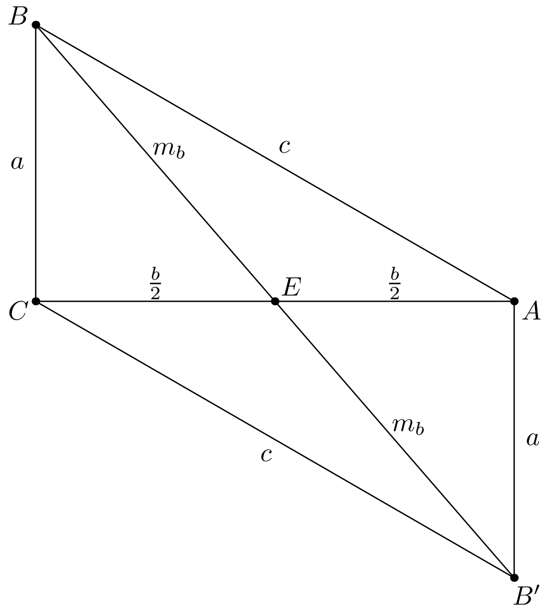
2. ratkaisu. Tunnettu *suunnikaslause* sanoo, että suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa.



(Suunnikaslauseen voi todistaa kosinilauseella. Myös pelkästään Pythagoraan lause riittää. Lisätään kuvioon seuraavat apupisteet ja -janat. Pidemmän lävistäjän pituuden neliö on $(a+x)^2 + h^2$ ja lyhyemmän $(a-x)^2 + h^2$, mistä väite seuraa, koska $x^2 + h^2 = b^2$.)



Mediaanien pituudet voi laskea hyödyntämällä suunnikaslausetta. Kolmion ABC voi täydentää eri tavoilla suunnikkaiksi, joiden lävistäjät ovat mediaaneja. Alla on yksi tapa, joka saadaan peilaamalla piste B pisteen E yli pisteeksi B'.



Suunnikaslause antaa nyt

$$(2m_b)^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2)$$

eli

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

Symmetrisesti saadaan

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

ja

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

ja haluttu tulos seuraa laskemalla nämä yhtälöt yhteen.

Huomautus. Jälkimmäinen ratkaisu toimii silloinkin, kun ABC ei ole suorakulmainen. Suunnikkaaksi täydentäminen ja suunnikaslauseen käyttö on hyvä tapa laskea mediaanin pituus.

Vielä kolmas tapa ratkaista tehtävä on käyttää kosinilausetta. Esimerkiksi kolmioon BEA sovellettuna kosinilause antaa

$$m_a^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 - bc\cos\alpha,$$

missä $\alpha = \angle A = \angle BAC$. Kulman α kosinin puolestaan saa esitettyä kolmion ABC sivujen avulla käyttämällä uudestaan kosinilausetta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

eli

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Tekemällä saman päättelyn symmetrisesti saadaan haluttu tulos. Tämäkään ratkaisu ei tarvitse tietoa siitä, että ABC on suorakulmainen kolmio.

2. *Määritä pienin n, jolle luvulla $n!$ on ainakin 2010 eri tekijää.*

Vastaus. Pienin tällainen n on $n = 14$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on hyödyntää lukuteorian tuloksia lukujen kertomien tekijöiden määrän laskemiseksi. Tämän jälkeen ratkaisu löydetään kokeilemalla.

Ratkaisu hyödyntää seuraavaa kahta lukuteorian tulosta:

- Jos luvun m alkutekijähajotelma on $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, niin m:n tekijöiden määrä on
$$d(m) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$
(Perustelu: jokainen tekijä on muotoa $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, missä $0 \le e_i \le a_i$. Luvulle e_i on siis $a_i + 1$ vaihtoehtoa kaikilla i.)

- Alkuluvun p eksponentti luvun $n!$ alkutekijähajotelmassa on
$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots,$$
missä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa lukua x pyöristettynä alaspäin. (Perustelu: tulossa $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ on $\lfloor n/p \rfloor$ lukua, jotka ovat jaollisia luvulla p. Lisäksi on $\lfloor n/p^2 \rfloor$ lukua, jotka ovat jaollisia luvulla p^2, ja niin edelleen.)

Huomataan vielä, että jos $m < n$, niin jokainen $m!$:n tekijä on $n!$:n tekijä, mutta $n!$:lla on tekijöitä, jotka eivät ole $m!$:n tekijöitä (esimerkiksi $n!$ itse). Siis $d(m!) < d(n!)$.

Vastaus löytyy sitten kokeilemalla. Esimerkiksi:

- Luvun 10! alkutekijähajotelmassa on $5+2+1 = 8$ kappaletta kakkosia, $3+1 = 4$ kappaletta kolmosia, 2 kappaletta vitosia ja yksi kappale lukua seitsemän. Siis
$$d(10!) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270,$$
mikä on liian pieni.

- Luvun 15! alkutekijähajotelmassa on $7 + 3 + 1 = 11$ kakkosta, $5 + 1 = 6$ kolmosta, 3 vitosta, 2 seiskaa ja yksi kappale lukuja yksitoista ja kolmetoista. Siis
$$d(15!) = 12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$
minkä lasketaan olevan 4032.

- Luvun 14! alkutekijähajotelma on muuten sama kuin luvun 15!, mutta siinä on yksi vitonen ja yksi kolmonen vähemmän. Siis
$$d(14!) = 12 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$
minkä lasketaan olevan 2592.

- Luvun 13! alkutekijähajotelma on muuten sama kuin luvun 14!, mutta kakkosia ja seiskoja on yksi vähemmän. Erityisesti tulossa yksi kolmonen muuttuu kakkoseksi, eli tekijöitä on enintään kaksi kolmasosaa edellisestä, eli

$$d(13!) \leq \frac{2}{3}d(14!) = 2592 \cdot \frac{2}{3} < 2000.$$

Täten vastaus on $n = 14$.

3. *Olkoon $P(x)$ kokonaislukukertoiminen polynomi, jolla on juuret* 1997 *ja* 2010. *Oletetaan lisäksi, että $|P(2005)| < 10$. Mitä kokonaislukuarvoja $P(2005)$ voi saada?*

Vastaus. Tällöin pätee $P(2005) = 0$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa $P(x)$ tulomuotoon ja tämän kautta tutkia lukua $P(2005)$.

Jos $P(x_0) = 0$, niin $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ jollain polynomilla $Q(x)$. Jos P:n kertoimet ovat kokonaislukuja ja x_0 on kokonaisluku, niin Q:kin on kokonaislukukertoiminen. [Todistus: Jos $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ja $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$, niin $a_n = b_{n-1}, a_{n-1} = b_{n-1} - x_0 b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2}, \ldots, a_1 = b_0 - b_0 x_0 b_1$. Kun näistä yhtälöistä ratkaistaan järjestyksessä $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$, nähdään, että kaikki ovat kokonaislukuja.] Käyttämällä kahdesti tätä perustulosta tehtävän polynomi voidaan kirjoittaa muotoon

$$P(x) = (x - 1997)(x - 2010)Q(x),$$

missä Q on kokonaislukukertoiminen polynomi. Siis erityisesti

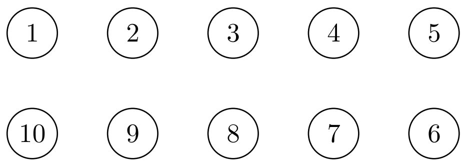
$$|P(2005)| = |2005 - 1997| \cdot |2005 - 2010| \cdot |Q(2005)| = 40|Q(2005)|.$$

$Q(2005)$ on kokonaisluku. Jos olisi $Q(2005) \neq 0$, olisi $|P(2005)| \geq 40 > 10$, vastoin oletusta. Siis $Q(2005) = 0$ ja $P(2005) = 0$.

4. *Parillinen määrä, n jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan, ts. kukin joukkue pelaa kerran kutakin toista vastaan. Osoita, että sarja voidaan ryhmitellä $n - 1$ kierrokseksi siten, että kullakin kierroksella jokainen joukkue pelaa tasan yhden pelin.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on asettaa joukkueparit kahteen riviin ja siirtää joukkueita kierroksen vaihtuessa sopivasti

Kirjoitetaan $n = 2k$, missä k on kokonaisluku. Numeroidaan joukkueet luvuin $1, 2, \ldots, 2k$. Asetetaan ensimmäisellä kierroksella joukkueet vastakkain niin, että peliparit ovat $(1, 2k), (2, 2k - 1), \ldots, (k, k + 1)$. Kuva havainnollistaa tätä tapauksessa $k = 5$.



Myöhemmät kierrokset saadaan seuraavan prosessin mukaisesti: joukkue $2k$ pysyy paikallaan ja muut joukkueet kiertää kuvion $2k-1$ muuta paikkaa myötäpäivään. Seuraavat kolme kierrosta on esitetty alla.

Toinen kierros:

9	1	2	3	4
10	8	7	6	5

Kolmas kierros:

8	9	1	2	3
10	7	6	5	4

Neljäs kierros:

7	8	9	1	2
10	6	5	4	3

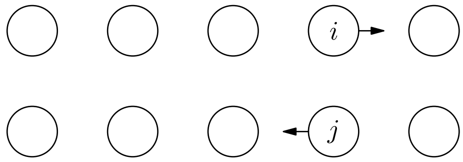
Ja niin edelleen. Viimeinen kierros näyttää tältä:

2	3	4	5	6
10	1	9	8	7

Perustellaan hieman, miksi tämä toimii.

Ensinnäkin jokainen joukkueista $1, 2, \ldots, 2k-1$ pelaa joukkuetta numero $2k$ vastaan täsmälleen kerran. Joukkue numero i, missä $2 \leq i \leq 2k-1$, pelaa joukkuetta $2k$ vastaan kierroksella $2k+1-i$, ja joukkue 1 pelaa joukkuetta $2k$ vastaan ensimmäisellä kierroksella.

Toisekseen mitkään joukkueista $1, 2, \ldots, 2k-1$ ei pelaa toisiaan vastaan useammin kuin kerran. Tutkitaan joukkueita $1 \leq i, j \leq 2k-1$. Joukkueen kierto kuviossa koostuu ylärivillä oikealta vasemmalle liikkumisesta ja alarivillä vasemmalta oikealle liikkumisesta. Jos i ja j pelaavat vastakkain kun i on ylärivillä, niin j on alarivillä, eivätkä he pelaa enää uudestaan vastakkain i:n ollessa ylärivillä: i nimittäin siirtyy oikealle ja j vasemmalle.



Ainoa tilanne, jossa i ja j pelaavat useammin toisiaan vastaan on, jos he pelaavat kerran vastakkain i:n ollessa ylärivillä ja toisen kerran i:n ollessa alarivillä. Mutta jos i ja j pelaavat vastakkain i:n ollessa ylärivillä, niin etäisyys i:stä j:hin kierron suuntaisesti on pariton (yllä kuvassa etäisyys on 3), ja jos he pelaavat vastakkain i:n ollessa larivillä on etäisyys i:stä j:hin kierron suuntaisesti parillinen (yllä kuvassa etäisyys j:stä i:hin on 6). Vain toinen näistä tilanteista on täten mahdollinen.

Siis jokainen joukkue pelaa jokaista toista joukkuetta vastaan enintään kerran. Koska jokainen joukkue pelaa jokaisella $n-1$ kierroksesta, seuraa tästä, että jokainen pelaa jokaista vastaan täsmälleen kerran.

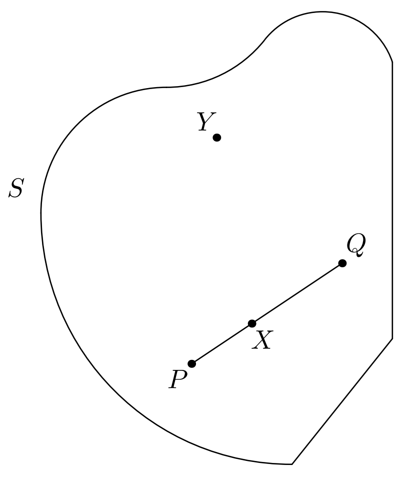
5. *Olkoon S jokin tason pistejoukko. Sanokaamme, että piste P näkyy pisteestä A, jos kaikki janan AP pisteet kuluvat joukkoon S ja että joukko S näkyy pisteestä A, jos jokainen S:n piste näkyy pisteestä A. Oletetaan, että S näkyy kolmion ABC jokaisesta kolmesta kärjestä. Todista, että joukko S näkyy jokaisesta muustakin kolmion ABC pisteestä.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on todistaa ensiksi vastaava väite janoille ja sitten käyttää tätä tulosta kolmion tapaukseen.

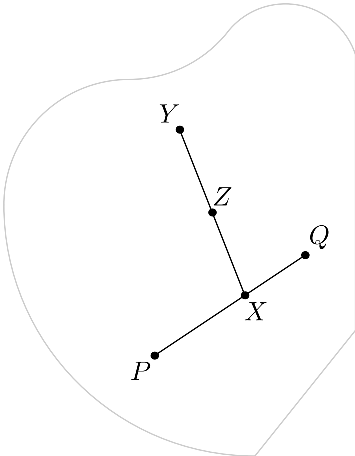
Osoitetaan ensin, että jos joukko S näkyy pisteistä P ja Q, niin jana PQ sisältyy joukkoon S ja S näkyy jokaisesta janan PQ pisteestä.

Näkymisen määritelmästä seuraa, että pisteet P ja Q kuuluvat joukkoon S. Koska Q näkyy pisteestä P, niin jana PQ sisältyy joukkoon S.

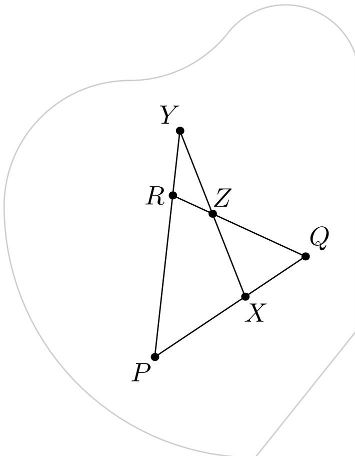
Olkoon nyt X mielivaltainen janan PQ piste ja Y mielivaltainen joukon S piste. Osoitetaan, että Y näkyy pisteestä X.



Oletetaan, että Y ei näy pisteestä X. Tämä tarkoittaa, että janalla XY on jokin piste Z, joka ei kuulu joukkoon S.

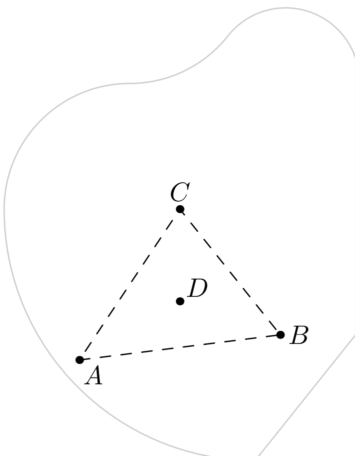


Tämä ei kuitenkaan käy: Olkoon R on suorien PY ja QZ leikkauspiste.



Nyt $R \in S$, koska Y näkyy pisteestä P. Mutta R ei näy pisteestä Q, koska $Z \notin S$. Ristiriita.

Todistetaan sitten alkuperäinen väite. Oletetaan, että S näkyy pisteistä A, B ja C. Olkoon D mielivaltainen piste kolmion ABC sisällä ja osoitetaan, että S näkyy pisteestä D.



Edellisen nojalla S näkyy jokaisesta janan AB pisteestä. Siis jos E on se piste janalla AB, joka on myös suoralla CD, niin S näkyy pisteestä E. Käyttämällä edellistä tulosta uudestaan saadaan janalle CE saadaan, että S näkyy pisteestä D.