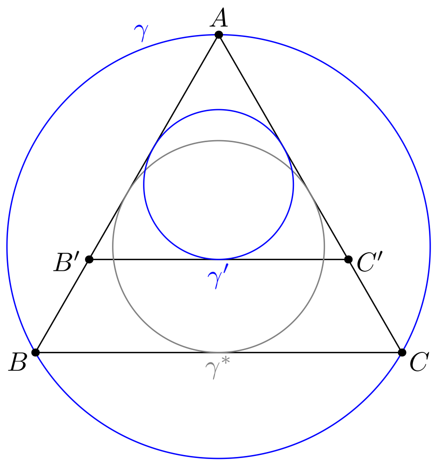
Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut 4.2.2011

1. *Ympyrän sisään piirretty tasasivuinen kolmio jaetaan kolmion sivun suuntaisella suoralla kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. Näin muodostuneen pienen kolmion sisään piirretään ympyrä. Laske tämän ympyrän pinta-alan suhde alkuperäisen ympyrän pinta-alaan.*

Vastaus. Alojen suhde on $1 : 8$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on verrata ympyröiden pinta-aloja kolmion ABC sisäympyrän pinta-alaan.

Olkoon tehtävän alkuperäinen kolmio ABC ja tämän kolmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen kolmioon jakava suora $B'C'$, missä B' on sivun AB ja C' sivun AC piste. Merkitään kolmion ABC ympäripiirrettyä ympyrää γ:lla ja kolmion $AB'C'$ sisäänpiirrettyä ympyrää γ':lla.



Verrataan kummankin ympyrän pinta-alaa kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän γ^* pinta-alaan.

Koska sivut $B'C'$ ja BC ovat samansuuntaisia, niin kolmio $AB'C'$ on myös tasasivuinen. Koska kolmion $AB'C'$ ala on puolet kolmion ABC alasta, on ympyrän γ' ala myös puolet ympyrän γ^* alasta.

Kolmion ABC merkilliset pisteet yhtyvät, koska se on tasasivuinen, joten ympyröillä γ^* ja γ on sama keskipiste O. Piste O jakaa mediaanit suhteessa $1 : 2$, mutta mediaanit ovat myös keskinormaaleja ja kulmanpuolittajia kolmion ABC tasasivuisuuden tähden. Lyhyempi osa mediaanista on siis ympyrän γ^*, pidempi osa (kuten AO) ympyrän γ säde. Koska säteiden suhde on $1 : 2$, alojen suhde on $1 : 4$.

Ympyröiden γ' ja γ alojen suhde on siis $1 : 8$.

Kommentti. Tehtävän voi toki ratkaista myös suoraan laskemalla sivujen pituuksia ja ympyröiden säteitä.

2. *Etsi kaikki kokonaisluvut x ja y, jotka toteuttavat epäyhtälön*

$$x^4 - 12x^2 + x^2y^2 + 30 \leq 0.$$

Vastaus. Epäyhtälöin kokonaislukuratkaisut ovat $(x, y) = (2, 0)$ ja $(x, y) = (-2, 0)$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on täydentää neliöksi.

Kun $x, y \in \mathbb{Z}$, niin

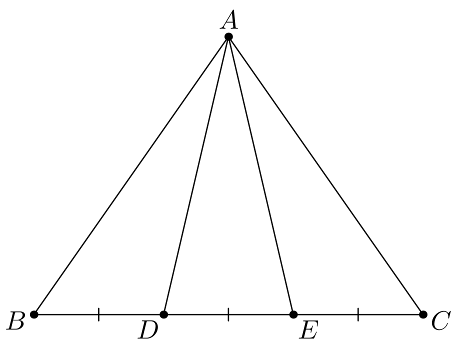
$$\begin{aligned} & x^4 - 12x^2 + x^2y^2 + 30 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 12x^2 + 36 + x^2y^2 \leq 6 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 6)^2 + (xy)^2 \leq 6. \end{aligned}$$

Tutkitaan, mitä arvoja neliöt voivat saada. Pitää päteä $(x^2 - 6)^2 \leq 6$. Jos $|x| \geq 3$, pätee $x^2 - 6 \geq 3^2 - 6 \geq 3$ ja $(x^2 - 6)^2 \geq 9 > 6$. Tulee siis olla $|x| \leq 2$. Jos $x = 0$, niin $(x^2 - 6)^2 = 36 > 6$ ja jos $|x| = 1$, niin $(x^2 - 6)^2 = 25 > 6$. Tulee siis olla $|x| = 2$, jolloin $(x^2 - 6)^2 = 4$.

Näillä x:n arvoilla tulee päteä $(\pm 2y)^2 \leq 6 - 4 = 2$, mistä seuraa $y = 0$.

Siis ainoat mahdolliset ratkaisut ovat $(x, y) = (-2, 0)$ ja $(x, y) = (2, 0)$. Sijoittamalla nämä alkuperäiseen epäyhtälöön huomataan, että ne myös todella ovat ratkaisuja.

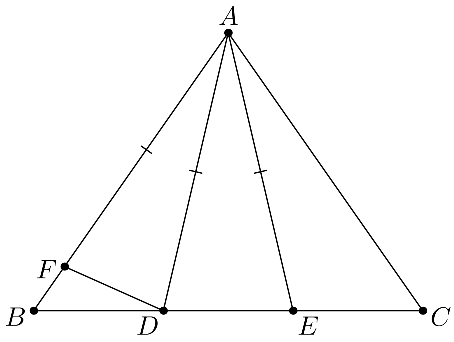
3. *Pisteet D ja E jakavat tasakylkisen kolmion ABC kannan BC kolmeen yhtä suureen osaan ja D on B:n ja E:n väliss. Osoita, että $\angle BAD < \angle DAE$.*



Ratkaisu. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäisen idea on luoda apupiste joka muodostaa kuvioon uuden tasakylkisen kolmion. Toisen idea on käyttää sinilausetta kulma- ja pituusehtojen hyödyntämiseksi.

1. tapa. Kolmio ABD ja ACE ovat yhteneviä (sks). Siis $AD = AE$, joten ADE on tasakylkinen kolmio.

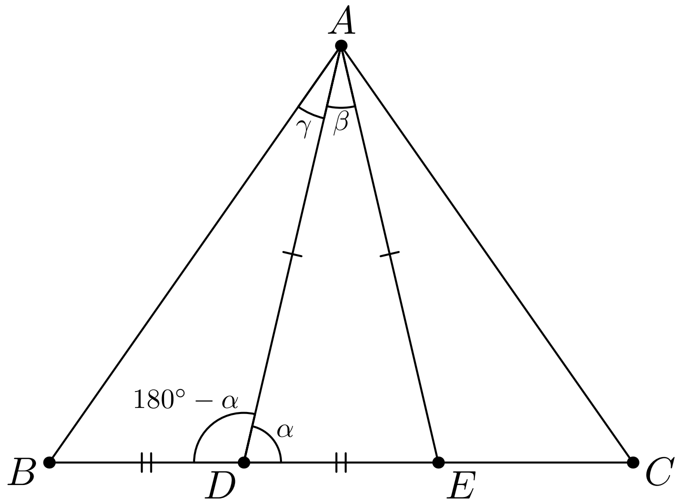
Valitaan sivulta AB piste F niin, että $AF = AD$.



Koska kolmio AFD on tasakylkinen, $\angle AFD$ on terävä kulma ja $\angle BFD$ on tylppä. Kolmiossa DFB pisin sivu on silloin BD. Siis $DF < BD = DE$. Tasakylkisillä kolmioilla AFD ja ADE on sama kylki, mutta edellisellä on pienempi kanta. Silloin edellisen kolmion huippukulmakin on pienempi.

2. tapa. Samoin kuin edellisessä ratkaisussa todistetaan, että $AD = AE$. Tasakylkisessä kolmiossa ADE kantakulmat ovat teräviä. Siis $\angle BDA$ on tylppä ja siis $\angle ABD < \angle ADB$. Siis $AB > AD = AE$.

Sovelletaan sitten sinilausetta kolmioihin ABD ja ADE. Käytetään alla olevan kuvan merkintöjä.



Sinilause antaa

$$\frac{BD}{\sin(\gamma)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)} \quad \text{ja} \quad \frac{DE}{\sin(\beta)} = \frac{AE}{\sin(\alpha)}.$$

Koska $BD = AE$, $AB > AE$ ja $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$, saadaan tästä $\sin(\gamma) < \sin(\beta)$ eli $\gamma < \beta$. Tämä on haluttu väite.

4. *Osoita, että on olemassa neliöluku (siis luku, joka on positiivisen kokonaisluvun toinen potenssi), jonka numeroiden summa on* 2011.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ensiksi tehdä huomioita koskien luvun arvoa modulo 9 ja sitten tehdä valistunut arvaus siitä, minkä tyyppiset luvut voisivat toimia.

Kun $n \in \mathbb{N}$, merkitään $s(n)$:llä luvun n numeroiden summaa. On siis löydettävä $n \in \mathbb{Z}_+$, jolle $s(n^2) = 2011$. Jaollisuussääntöjen perusteella tiedetään, että tällaiselle luvulle pätee

$$n^2 \equiv s(n^2) = 2011 \equiv s(2011) = 2 + 0 + 1 + 1 = 4 \pmod 9,$$

joten välttämättä $n \equiv \pm 2 \pmod 9$.

Pyritään valitsemaan n niin, että numeroiden summa on helppo laskea. Tarkastellaan siksi lukuja $n = 10^k - 3 (k \in \mathbb{Z}_+)$; tällöinhän $n \equiv 1 - 3 \equiv -2 \pmod 9$. Koska

$$\begin{aligned} n^2 &= (10^k - 3)^2 = 10^{2k} - 6 \cdot 10^k + 9 \\ &= (10^{k-1} - 1)10^{k+1} + 4 \cdot 10^k + 9 \\ &= \underbrace{99\ldots9}_{k-1 \text{ kpl}}4\underbrace{00\ldots0}_{k-1 \text{ kpl}}9, \end{aligned}$$

niin $s(n^2) = (k-1) \cdot 9 + 4 + 9 = 9k + 4$. Ehto $2011 \equiv 4 \pmod 9$ tarkoittaa juuri, että yhtälöllä $2011 = 9k + 4$ on ratkaisu; itse asiassa $k = 223$ käy. Siis luvulle $n = 10^{223} - 3$ pätee $s(n^2) = 2011$.

5. *Kaksi pelaajaa, rakentaja ja hajottaja, pelaavat seuraavanlaista peliä. Rakentaja aloittaa, ja pelaajat valitsevat vuorotellen joukon* $\{0, 1, \ldots, 10\}$ *eri alkioita. Rakentaja voittaa, jos jotkin neljä hänen valitsemistaan kuudesta alkiosta muodostavat aritmeettisen jonon. Hajottaja puolestaan voittaa, jos hän pystyy estämään rakentajaa muodostamasta tällaista aritmeettista nelikkoa. Kummalla pelaajista on voittostrategia?*

Vastaus. Hajottajalla on voittostrategia.

Ratkaisu. Kutsuttakoon paria $\{a, b\}$ *kriittiseksi*, jos hajottaja pystyy varmistamaan itselleen voiton pelaamalla kahdella ensimmäisellä siirrollaan parin alkiot. Ratkaisun idea on löytää muutama kriittinen pari ja sitten todeta, että hajottaja voi saada haltuunsa jonkin niistä.

Osoitetaan ensin, että $\{4, 7\}$ on kriittinen pari: Oletetaan, että hajottaja on pelannut parin $\{4, 7\}$ kahdella ensimmäisellä siirrollaan. Vain kaksi kyseeseen tulevaa aidosti kasvavaa aritmeettista nelikkoa välttää parin $\{4, 7\}$, nimittäin nelikot $(0, 1, 2, 3)$ ja $(0, 3, 6, 9)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \times & \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

tai

$$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \cdot & \cdot & \circ & \times & \cdot & \circ & \times & \cdot & \circ & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Näiden ja rakentajan pelattavaksi jääneiden nelikoiden leikkaus on $\{0, 3\}$, joten vain toisessa nelikoista voivat sijaita kaikki kolme ensimmäistä siirtoa. Hajottaja valitsee kolmannella siirrollaan viimeisen alkion tästä nelikosta (tai kummasta tahansa käsiteltävistä nelikoista, jos rakentajan siirrot eivät keskity kumpaankaan näistä nelikoista), ja tuhoaa neljännellä siirrollaan jäljelle jääneen nelikoista. Siis $\{4, 7\}$ on kriittinen.

Symmetrian perusteella pari $\{10 - 7, 10 - 4\} = \{3, 6\}$ on hajottajalle yhtä hyvä kuin $\{4, 7\}$, siis kriittinen pari.

Osoitetaan, että myös $\{4, 9\}$ on kriittinen. Oletetaan, että hajottaja on kahdella ensimmäisellä siirrollaan valtaa parin. Ainoat pelattavat aidosti kasvavat aritmeettiset nelikot, jotka eivät kulje parin $\{4, 9\}$ kautta, ovat $(0, 1, 2, 3), (5, 6, 7, 8)$ ja $(1, 3, 5, 7)$.

$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\times$	$\cdot$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

tai

$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\cdot$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

tai

$\cdot$	$\circ$	$\cdot$	$\circ$	$\times$	$\circ$	$\cdot$	$\circ$	$\cdot$	$\times$	$\cdot$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Kaksi ensimmäistä näistä nelikoista ovat erillisiä, ja molemmat kohtaavat jonon $(1, 3, 5, 7)$ kahdessa kohdassa. Voidaan olettaa, että rakentajan kolmesta ensimmäisestä siirrosta korkeintaan yksi on joukossa $\{0, 1, 2, 3\}$. Jos kaikki nämä kolme siirtoa ovat joukossa $\{5, 6, 7, 8\}$, niin hajottaja ensin tuhoaa nelikon $(5, 6, 7, 8)$, rakentamisen valitsemalla jäljelle jääneen alkion ja sitten neljännellä siirrollaan valitsee luvun 1 tai 3, kumpi onkaan vapaana. Jos yksi kolmesta ensimmäisestä rakentajan siirrosta on joukossa $\{0, 1, 2, 3\}$, niin hajottaja ensin valitsee kolmannella siirrollaan joukosta $\{1, 3, 5, 7\}$ alkion, joka tuhoaa aidosti kasvavaa aritmeettista nelikkoa, ja sitten neljännellä siirrollaan jäljelle jääneen nelikon.

Symmetrian perusteella myös $\{10 - 9, 10 - 4\} = \{1, 6\}$ on kriittinen, joten parit $\{4, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 9\}$ ja $\{1, 6\}$ ovat kaikki kriittisiä. Rakentaja ei pysty estämään hajottajan pyrkimystä valloittaa jokin näistä kriittisistä pareista kahdella avaussiirrollaan: symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että rakentajan ensimmäinen siirto on jokin $a \leq 5$. Jos se on $a \neq 4$, hajottaja vastaa valitsemalla luvun 4 ja seuraavalla siirrollaan valloittaa joko parin $\{4, 7\}$ ja $\{4, 9\}$. Jos rakentajan ensimmäinen valinta on 4, niin hajottaja siirtää 6 ja onnistuu valloittamaan joko parin $\{3, 6\}$ tai $\{1, 6\}$. Siis hajottajalla on voittostrategia.