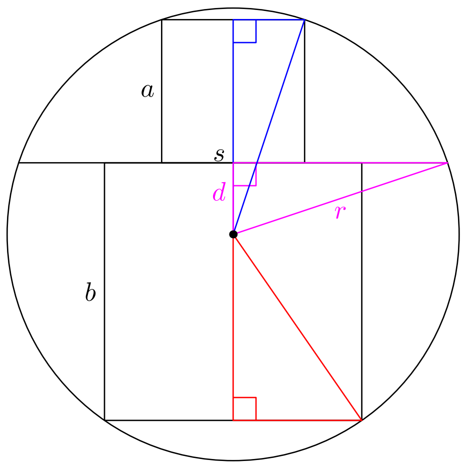
Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 3.2.2012

1. *Jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin. Segmenttien sisään on piirretty neliöt siten, että molempien neliöiden kärjistä kaksi on jänteellä ja kaksi ympyrän piirillä. Neliöiden sivujen suhde on* $5 : 9$*. Laske jänteen ja ympyrän säteen pituuksien suhde.*

Vastaus. Jänteen ja ympyrän säteen pituuksien suhde on $3\sqrt{10} : 5$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on hyödyntää Pythagoraan lausetta yhtälöryhmän pystyttämiseksi. Yhtälöryhmästä saadaan ratkaistua eri pituuksia.



Merkitään pienemmän neliön sivua a:lla ja suuremman b:llä, jolloin $a : b = 5 : 9$. Merkitään edelleen ympyrän sädettä r:llä, jänteen etäisyyttä ympyrän keskipisteestä d:llä ja jänteen pituutta s:llä.

Pythagoraan lauseella saadaan (sinistä, punaista ja vaaleanpunaista suorakulmaista kolmiota vastaavat) yhtälöt

$$\begin{cases} (a+d)^2 + (a/2)^2 = r^2 \\ (b-d)^2 + (b/2)^2 = r^2 \\ d^2 + (s/2)^2 = r^2. \end{cases}$$

Ideana on ratkaista tästä yhtälöstä d luvun a avulla esitettynä, minkä jälkeen saadaan esitettyä myös r ja s luvun a avulla.

Ensimmäinen ja toinen yhtälö antavat

$$(a+d)^2 + (a/2)^2 = (b-d)^2 + (b/2)^2$$

eli auki kerrottuna ja sievennettynä

$$\frac{5}{4}a^2 + 2ad = \frac{5}{4}b^2 - 2bd.$$

Ratkaistaan tästä d:

$$d = \frac{\frac{5}{4}b^2 - \frac{5}{4}a^2}{2b + 2a} = \frac{5}{8}(b-a),$$

missä käytettiin kahden neliön erotusta $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Koska $b = \frac{9}{5}a$, niin tästä saadaan
$$d = \frac{a}{2}.$$

Sijoittamalla saatu tieto ensimmäiseen yhtälöön saadaan ratkaistua r luvun a avulla ilmaistuna:
$$\left(a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2$$
eli
$$r = \sqrt{\frac{10}{4}a^2} = a\sqrt{10}/2.$$

Vielä kolmannesta yhtälöstä saadaan laskettua s:
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}a^2$$
eli sievennettynä
$$s = 3a.$$

Tästä saadaan vastaus:
$$s : r = (3a) : (a\sqrt{10}/2) = 6 : \sqrt{10} = 3\sqrt{10} : 5.$$

2. *Oletetaan, että $x \neq 1$, $y \neq 1$ ja $x \neq y$. Osoita, että jos*
$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{zx - y^2}{1-y},$$
niin
$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{zx - y^2}{1-y} = x + y + z.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ratkaista annetusta yhtälöstä z ja sitten todistaa haluttu väite. Muuttujan z ratkaisemiseksi hyödynnetään tekijöihinjakoa.

Ratkaistaan z. Kerrotaan annettu yhtälö puolittain luvulla $(1-x)(1-y) \neq 0$, jolloin saadaan
$$(yz - x^2)(1-y) = (zx - y^2)(1-x).$$
Kerrotaan auki ja siirretään muuttujaa z sisältävät termit yhtälön vasemmalle ja muut termit oikealle puolelle. Saadaan
$$z(y(1-y) - x(1-x)) = x^2(1-y) - y^2(1-x).$$

Avainidea on, että sekä vasemman että oikean puolen x:n ja y:n lausekkeet jakautuvat tuloksi, jossa yksi termi on $x - y$. (Tähän vihjaa se, että lausekkeet ovat nollia sillon, kun $x = y$. Toinen vihje on tehtävänannon ehto $x \neq y$.) Yhtälön saa kirjoitettua muotoon
$$z(x-y)(x+y-1) = (x-y)(x+y-xy).$$

Jakamalla puolittain luvulla $x - y \neq 0$ saadaan

$$z(x + y - 1) = x + y - xy. \tag{1}$$

Todistetaan sitten haluttu väite eli

$$\frac{yz - x^2}{1 - x} = x + y + z.$$

Kerrotaan puolittain luvulla $1 - x \neq 0$ ja siirretään taas muuttujaa z sisältävät termit vasemmalle puolelle ja muut termit oikealle puolelle. Todistettavaksi saadaan ekvivalentti väite

$$z(x + y - 1) = x^2 + (1 - x)(x + y)$$

eli

$$z(x + y - 1) = x + y - xy.$$

Tämä on sama kuin todistamamme yhtälö (1), eli olemme valmiit.

3. *Todista, että kaikilla kokonaisluvuilla $k \geq 2$ luku $k^{k-1} - 1$ on jaollinen luvulla $(k-1)^2$.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on esittää lauseke $\frac{k^{k-1}-1}{k-1}$ geometrisena summana ja tutkia sitä modulo $k - 1$.

Geometrisen jonon summakaavan nojalla

$$\frac{k^{k-1} - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{k-2}. \tag{2}$$

Tämä todistaa jo, että $k - 1 \mid k^{k-1} - 1$ (oikea puoli kun on kokonaisluku). Kongruenssien laskusääntöjen avulla oikean puolen arvo modulo $k - 1$ on

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^{k-2} \equiv \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{k-1 \text{ kpl}} \equiv 0 \pmod{k-1}.$$

Tästä seuraa, että $k - 1$ jakaa yhtälön (2) oikean puolen, eli $(k^{k-1} - 1)/(k - 1)^2$ on kokonaisluku eli $(k - 1)^2$ jakaa luvun $k^{k-1} - 1$.

4. Olkoot $k, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$. Todista, että

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq n^k.$$

Ratkaisu. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen ratkaisu perustuu epäyhtälön vasemman ja oikean puolen kombinatoriseen tulkintaan. Toinen perustuu karkeiden arvioiden tekemiseen.

1. ratkaisu. Tutkitaan kaikkia mahdollisia funktioita $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Näitä funktioita on n^k kappaletta.

Toisaalta jokaiselle f voidaan assosioida f:n arvojoukko $S \subset \{1, \ldots, n\}$ (eli niiden $y \in \{1, \ldots, n\}$ joukko, joita kohden on jokin $x \in \{1, \ldots, k\}$ jolla $f(x) = y$). Kukin näistä arvojoukoista on joukon $\{1,\dots n\}$ osajoukko, jonka koko on vähintään yksi ja enintään k. Näitä arvojoukkoja on siis enintään $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}$.

Koska funktioita on vähintään yhtä paljon kuin mahdollisia arvojoukkoja, pätee

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}\le n^k.$$

2. ratkaisu. Tunnetusti binomikertoimet kasvavat keskelle päin mentäessä: jos $m+1\le n/2$, niin $\binom{n}{m}\le\binom{n}{m+1}$, ja jos $m\ge n/2$, niin $\binom{n}{m}\ge\binom{n}{m+1}$.

Tutkitaan tapaukset $k\le n/2$ ja $k>n/2$ erikseen.

Jos $k\le n/2$, niin

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}&\le k\binom{n}{k}\\ &=k\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}\\ &\le\frac{n^k}{(k-1)!}\le n^k.\end{aligned}$$

Jos $k>n/2$, niin käytetään tunnettua tietoa koskien binomikertoimien summia:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}\le\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Nyt jos $n\ge 4$, niin pätee

$$2^n\le(\sqrt{n})^n=n^{n/2}<n^k.$$

Jäljelle jää tutkittavaksi tapaukset $(n,k)=(1,1),(2,2),(3,2)$ ja $(3,3)$. Näissä tapauksissa väitteen pätevyys on helppo tarkistaa.

Kommentti. Toisen ratkaisun tapaiset karkeat arviot voi tehdä myös muilla tavoilla. Esimerkki: Tapaus $n=1$ on selvä, oletetaan $n\ge 2$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{k}&\le\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^k}{k!}\\ &\le\frac{n^k}{2^{k-1}\cdot 1!}+\frac{n^k}{2^{k-2}\cdot 2!}+\cdots+\frac{n^k}{2^1\cdot(k-1)!}+\frac{n^k}{2^0\cdot k!},\end{aligned}$$

ja riittää enää osoittaa, että

$$\frac{1}{2^{k-1}\cdot 1!}+\frac{1}{2^{k-2}\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{2^0\cdot k!}\le 1.$$

Tätä voi arvioida geometrisena summana arvioimalla kertomia esimerkiksi rajan $m!\ge 2^{m-1}$ kautta, mikä antaa summalle ylärajan $k/2^{k-1}$, mikä on enintään 1 (minkä voi todistaa esimerkiksi induktiolla).

5. *Collatzin funktio on kuvaus $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, jolle*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{kun } x \text{ on pariton,} \\ x/2, & \text{kun } x \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Merkitään lisäksi $f^1 = f$ ja induktiivisesti $f^{k+1} = f \circ f^k$, ts. $f^k(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{k\ kpl}(x)\ldots)$.

Todista, että on olemassa $x \in \mathbb{Z}_+$, jolle

$$f^{40}(x) > 2012x.$$

Ratkaisu. Ideoita ratkaisun taustalla on avattu alla olevassa kommentissa.

Osoitetaan, että $x = 2^{20} - 1$ toteuttaa annetun ehdon. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{aligned} x &= 2^{20} - 1, \\ f(x) &= 3 \cdot 2^{20} - 2, \\ f^2(x) &= 3 \cdot 2^{19} - 1, \\ f^3(x) &= 3^2 \cdot 2^{19} - 2, \\ f^4(x) &= 3^2 \cdot 2^{18} - 1, \\ &\vdots \\ f^{40}(x) &= 3^{20} - 1. \end{aligned}$$

(Säännönmukaisuuden voi todistaa induktiolla.) Lisäksi

$$f^{40}(x) = 3^{20} - 1 > \left(\frac{3}{2}\right)^{20} \left(2^{20} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{20} x,$$

missä

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{20} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right)^{5} \geq \left(\frac{81}{16}\right)^{5} \geq 5^5 = 3125 > 2012.$$

Väite seuraa.

Kommentti. Miten tähän ratkaisuun päädytään?

Haluamme siis löytää luvun x, jolla funktion f toistuvasti soveltaminen lukuun x kasvattaa lukua paljon. Haluamme siksi olla mahdollisimman usein “hyvässä” tilanteessa $f(x) = 3x + 1$ ja mahdollisimman harvoin “huonossa” tilanteessa $f(x) = x/2$.

Huomataan, että jos y on pariton, niin $f(y) = 3y + 1$ on parillinen ja siten $f^2(y) = (3x+1)/2$. Siis hyvän tilanteen jälkeen tulee väkisinkin huono tilanne. Täten jonossa $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$ ei voi olla kahta hyvää tilannetta peräkkäin, ja kaksi funktion iteraatiota voi enimmillään noin 1,5-kertaistaa luvun.

Tässä kohtaa auttaa huomata, että $1{,}5^{20}$ on suunnilleen 3125 (kuten ratkaisussa laskettiin), mikä on yli 2012. Varaa virheisiin ei kuitenkaan juuri ole. Pyritään siis valitsemaan luku x, jolla kaksi f:n iteraatiota suunnilleen 1,5-kertaistaa luvun.

Toisin sanoen etsitään x, jolla $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{40}(x)$ ovat vuorotellen parittomia ja parillisia, aloittaen parittomasta. Mitä tämä vaatii?

Ensinnäkin tämä vaatii, että x on pariton.

Toisekseen tämä vaatii, että $f^2(x) = (3x+1)/2$ on pariton. Siis tulee olla $3x+1 \equiv 2 \pmod 4$, mistä ratkaistaan $x \equiv 3 \pmod 4$.

Kolmannekseen tämä vaatii, että $f^4(x) = (3f^2(x) + 1)/2$ on pariton. Kuten edellä, tämä tarkoittaa että $3f^2(x) \equiv 1 \pmod 4$ eli $f^2(x) \equiv 3 \pmod 4$. Koska $f^2(x) = (3x+1)/2$, haluamme siis $3x + 1 \equiv 6 \pmod 8$ eli $x \equiv 7 \pmod 8$.

Säännönmukaisuus alkaa hahmottua: yleisesti haluamme, että $x \equiv 2^k - 1 \pmod{2^k}$. Täten ensimmäiset 40 iteraatiota toimivat oikein jos valitaan $x = 2^{20} - 1$.