Lukion matematiikkakilpailu 1.2.2013

1. *Polynomifunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, *kertoimet* a, b *ja* c *ovat keskenään erisuuria, nollasta eroavia kokonaislukuja. Lisäksi* $f(a) = a^3$ *ja* $f(b) = b^3$. *Määritä kertoimet* a, b *ja* c.

Vastaus. Kertoimet ovat $a = -2, b = 4, c = 16$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia polynomia $g(x) = f(x) - x^3$, jonka nollakohtina ovat a ja b, ja hyödyntää polynomin nollakohtaesitystä.

Olkoon $g(x) = f(x) - x^3 = ax^2 + bx + c$. Nyt g on toisen asteen polynomi, jolla on nollakohtinaan a ja b: $g(a) = g(b) = 0$. Nollakohtien antaman polynomin tuloesityksen nojalla nyt pätee

$$g(x) = a(x - a)(x - b).$$

Vertailemalla tämän ja esityksen $g(x) = ax^2 + bx + c$ kertoimia saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} b &= -a(a + b) \\ c &= a^2 b. \end{cases}$$

Ensimmäinen yhtälö on lineaarinen b:n suhteen, ja b saadaan ratkaistua:

$$b = -\frac{a^2}{a+1} = -\frac{a^2 - 1 + 1}{a+1} = -(a - 1) - \frac{1}{a+1}.$$

(Ei voi päteä $a \neq -1$.) Jotta b olisi kokonaisluku, on välttämättä oltava $a + 1 = \pm 1$. Koska $a \neq 0$, vain $a = -2$ on mahdollinen. Siis välttämättä $b = 4$ ja siten $c = 16$.

2. *Eräässä eurooppalaisessa kaupungissa myydään joukkuliikenteeseen vain kausilippuja, joista toiset ovat* 7 *päivän, toiset* 30 *päivän lippuja. Edelliset maksavat* 7,03€, *jälkimmäiset* 30€. *Aina Algebrikko päättää kerralla hankkia liput, joilla hän pääsee matkustamaan koko kolmivuotisen (2014-2016) eli* 1096*-päiväisen oleskelunsa ajan kaupungin julkisella kulkuneuvolla. Mikä on edullisin ratkaisu?*

Vastaus. Edullisin vaihtoehto on 28 viikkolippua ja 30 kuukausilippua (jolloin liput riittävät tasan 1096 päiväksi).

Ratkaisu. Ratkaisun idea on osoittaa, että paras ratkaisu on se, jossa liput kestävät tasan 1096 päiväksi.

Olkoot m Ainan ostamien seitsemän päivän ja n 30 päivän lippujen määrät. Tulee olla $7m + 30n \geq 1096$. Lippujen hinta on

$$7{,}03m + 30n = (7m + 30n) + 0{,}03m.$$

Tutkitaan ensiksi ratkaisuja, joissa liput kestävät tasan 1096 päiväksi, eli $7m + 30n = 1096$. Luku m kannattaa valita mahdollisimman pieneksi. Valitaan siis m olemaan pienin luku, jolla $1096 - 7m$ on jaollinen luvulla 30. Tavalla tai toisella saadaan laskettua, että pienin tällainen m on 28.

(Voi esimerkiksi tutkia ehtoa kongruenssien kautta: halutaan $1096 - 7m \equiv 0 \pmod{30}$ eli $7m \equiv 16 \pmod{30}$. Voi käydä 30 tapausta läpi tai huomata, että $16 \equiv -14 \pmod{30}$, joten $m \equiv -2 \pmod{30}$ on ratkaisu.)

Arvoa $m = 28$ vastaava n:n arvo on $n = (1096 - 7 \cdot 28)/30 = 30$. Ratkaisun $(m, n) = (28, 30)$ hinta on

$$(7m + 30n) + 0{,}03m = 1096{,}84.$$

Jos liput kestävät yli 1096 päiväksi, on lippujen hinta välttämättä vähintään 1097:

$$7{,}03m + 30n = (7m + 30n) + 0{,}03m \geq 1097.$$

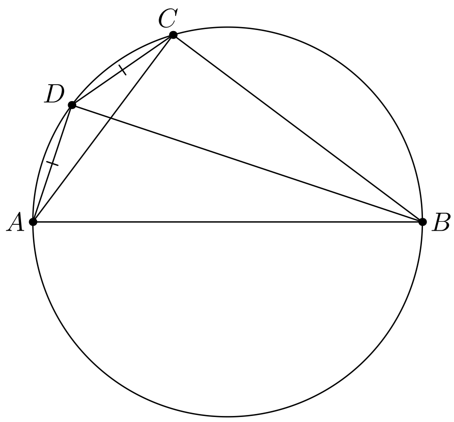
Siis halvin ratkaisu on se, jossa päivät menevät tasan, eli $(m, n) = (28, 30)$ on paras ratkaisu.

3. *Pisteet A, B ja C sijaitsevat yksikköympyrän kehällä. Lisäksi tiedetään, että AB on ympyrän halkaisija ja*

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{3}{4}.$$

Kulman ABC puolittaja leikkaa ympyrän kehän pisteessä D. Määritä janan AD pituus.

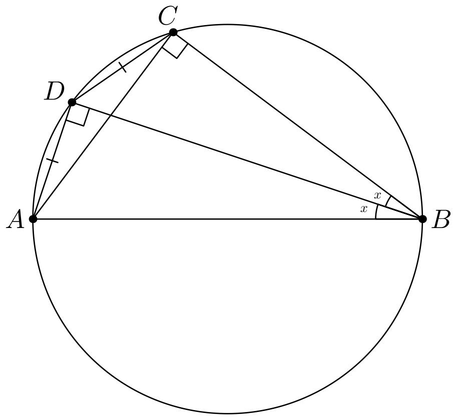
Vastaus. $AD = 2/\sqrt{10} = \sqrt{10}/5$.



Ratkaisu. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen ratkaisu käyttää trigonometriaa ja trigonometrisia identiteettejä. Toinen ratkaisu laskee yksitellen eri pituuksia Pythagoraan lauseen, kulmanpuolittajalauseen ja yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

1. ratkaisu. Todetaan ensin, että kehäkulmalauseen nojalla ACB ja ADB ovat suorakulmaisia kolmioita.

Merkitään $2x = \angle CBA$, jolloin $\angle DBA$ ja $\angle CBD$ ovat molemmat x.



Tiedämme, että

$$\cos(2x) = \frac{4}{5}. \tag{1}$$

Tavoitteena on laskea $\sin(x)$, koska suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan $AD = 2\sin(x)$.

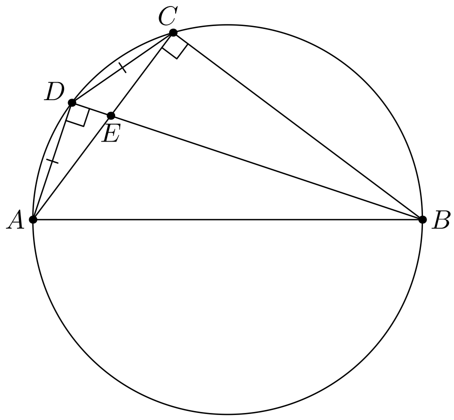
Lasketaan ensiksi $\cos(x)$. Tämä saadaan yhtälöstä (1): kosinin summakaava ja identiteetti $\sin^2 + \cos^2 = 1$ antavat

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1.$$

Täten $2\cos(x)^2 = 9/5$ eli $\cos(x)^2 = 9/10$. Käytetään uudestaan identiteettiä $\sin^2 + \cos^2 = 1$: nyt $\sin(x)^2 = 1/10$. Siis $\sin(x) = 1/\sqrt{10}$ ja

$$AD = 2\sin(x) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

2. ratkaisu. Kuten ensimmäisessä ratkaisussa, ADB ja ACB ovat suorakulmaisia kolmioita. Täydennetään kuvioon kulmanpuolittajan BD leikkauspiste sivun AC kanssa.



Ratkaisu koostuu neljästä vaiheesta:

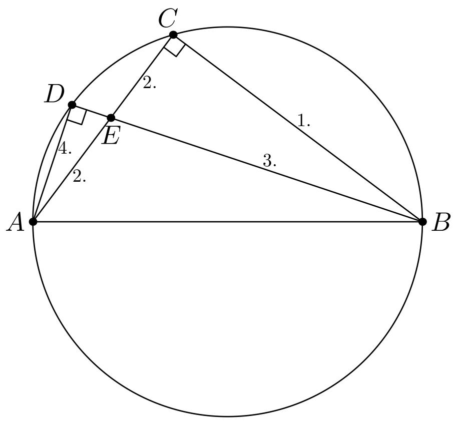
1. Pythagoraan lause: Koska ACB on suorakulmainen ja $AC : CB = 3 : 4$, on ACB suorakulmainen kolmio, jonka sivujen suhteet ovat $3 : 4 : 5$. (Täten koska $AB = 2$, pituudet AC ja CB osataan laskea.)

2. Kulmanpuolittajalause: E jakaa sivun AC sivujen AB ja BC pituuksien suhteessa. (Pituudet AE ja EC saadaan laskettua tästä.)

3. Pythagoraan lause: Pituus BE saadaan laskettua edellisten tulosten ja Pythagoraan lauseen avulla kolmiosta BCE.

4. Yhdenmuotoiset kolmiot: AED ja BCE ovat yhdenmuotoisia (kkk). Yhdessä edellisten tulosten kanssa tästä saadaan laskettua AD.

Saamme siis yksitellen laskettua pituuksia kuviosta eri työkalujen avulla. Alla olevaan kuvioon on merkitty, missä vaiheessa mikäkin pituus saadaan laskettua.



Tehdään sitten tarkat laskut.

Vaihe 1: Kuten todettiin, ABC on $3 : 4 : 5$ -kolmio, eli

$$AC = \frac{6}{5}, \qquad BC = \frac{8}{5}.$$

Vaihe 2: Kulmanpuolittajalauseen nojalla

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Lisäksi $AE + EC = AC = 6/5$. Jos siis merkitään $AE = x$, niin $EC = 6/5 - x$ ja

$$\frac{x}{6/5 - x} = \frac{5}{4}.$$

Kertomalla auki saadaan ensimmäisen asteen yhtälö, jonka ratkaisu on $x = 2/3$. Lisäksi $6/5 - x = 8/15$, joten

$$AE = \frac{2}{3}, \qquad EC = \frac{8}{15}.$$

Vaihe 3: Pythagoraan lause kolmioon BCE antaa nyt

$$BE^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2,$$

mistä sieventelyn jälkeen saadaan

$$BE = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Vaihe 4: Yhdenmuotoisten kolmioiden ADE ja BCE avulla saadaan

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BC}{BE}.$$

Tästä tiedetään kaikki muut pituudet paitsi AD. Täten AD saadaan ratkaistua:

$$AD = \frac{AE \cdot BC}{BE} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5}}{\frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}}.$$

Sieventämällä saadaan vastaus

$$AD = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

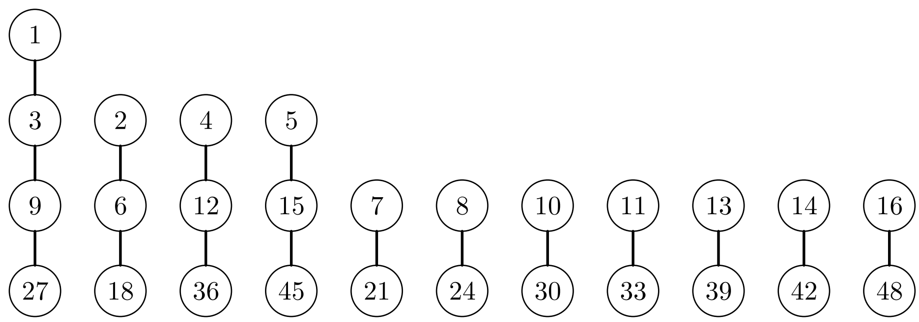
Kommentti. Toinen ratkaisu on samantyyppinen kuin monet "kulmanjahtaukseen" eli kulmien laskemiseen perustuvat tehtävät: käytetään työkaluja ja hiljalleen kerrytetään tietoa eri pituuksista/kulmista. Kulmanjahtauksessa käytetään useimmiten kehäkulmalausetta, kolmion kulmien summaa, tasakylkisiä kolmioita ja niin edelleen, kun taas tämän ratkaisun "pituusjahtauksessa" käytettiin Pythagoraan lausetta, kulmanpuolittajalausetta ja yhdenmuotoisia kolmioita.

4. *Joukon* $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ *osajoukon* E *sanotaan olevan* erikoinen*, jos se ei sisällä yhtään muotoa* $\{x, 3x\}$ *olevaa paria. Erikoinen joukko* E *on* supererikoinen*, jos se on mahdollisimman monta alkiota sisältävä erikoinen joukko. Montako alkiota supererikoisessa joukossa on ja montako eri supererikoista joukkoa on olemassa?*

Vastaus. Supererikoisessa joukossa on 38 alkiota ja supererikoisia joukkoja on 384 kappaletta.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on jakaa luvut $1, 2, \ldots, 50$ eri joukkoihin sen perusteella, mitkä niistä ovat yhteydessä toisiinsa parien $\{x, 3x\}$ kautta.

Alla on piirretty kuva, jossa on lukuja $1, 2, \ldots, 50$, ja kaksi lukua on yhdistetty toisiinsa jos ne muodostavat parin muotoa $\{x, 3x\}$.



Kuvan lukujen lisäksi on lukuja, jotka eivät ole yhteydessä mihinkään muuhun lukuun. Nämä luvut ovat ne lukua 16 isommat luvut, jotka eivät ole kolmella jaollisia.

Tutkitaan sitten, montako lukua supererikoisessa joukossa on. Luvuista $\{1, 3, 9, 27\}$ voi valita enintään kaksi, kuten myös kolmikoista $\{2, 6, 18\}, \{4, 12, 36\}, \{5, 15, 45\}$. Kuvan seitsemästä parista $\{7, 21\}, \{8, 24\}, \ldots, \{16, 48\}$ voidaan valita kustakin vain yksi luku. Lisäksi kuvan ulkopuolella on joitakin lukuja; kuvassa on $4+3\cdot3+7\cdot2 = 27$ lukua, joten kuvaan on jätetty merkitsemättä $50 - 27 = 23$ lukua. Nämä ulkopuoliset luvut voidaan kaikki valita. Supererikoisessa joukossa on siis

$$4 \cdot 2 + 7 + 23 = 38$$

alkiota.

Tutkitaan sitten, montako eri supererikoista joukkoa on olemassa. Kuvaan merkitsemättömät 23 lukua on pakko valita. Kuvan seitsemästä parista $\{7, 21\}, \ldots, \{16, 48\}$ valitaan aina kahdesta vaihtoehdosta yksi luku, mistä tulee 2^7 vaihtoehtoa. Kolmikoiden $\{2, 6, 18\}, \{4, 12, 36\}$ ja $\{5, 15, 45\}$ tapauksessa on vain yksi mahdollinen tapa valita kolmikosta maksimaalinen määrä lukuja. Nelikon $\{1, 3, 9, 27\}$ tapauksessa tapoja on kolme: $(1, 9), (1, 27)$ ja $(3, 27)$. Supererikoisia joukkoja on siis $3 \cdot 2^7 = 384$.

5. *Etsi kaikki kokonaislukukolmikot* (m, p, q)*, jotka toteuttavat yhtälön*

$$2^m p^2 + 1 = q^5$$

ja joissa lisäksi $m > 0$ *sekä* p *ja* q *ovat alkulukuja.*

Vastaus. Yhtälöllä on yksi ratkaisu, $(m, p, q) = (1, 11, 3)$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa yhtälö tulomuotoon ja tutkia tekijöiden alkutekijähajotelmia. Tätä kautta saadaan osoitettua $q = 2^m + 1$. Ratkaisun voi viimeistellä tästä parillakin tavalla.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon $2^m p^2 = q^5 - 1$. Oikea puoli jakautuu tekijöihin, joista yksi on $q - 1$ (koska $x = 1$ on polynomin $x^5 - 1$ nollakohta):

$$2^m p^2 = (q - 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1).$$

Yhtälön oikean puolen termi $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ on pariton, joten $q - 1$ on jaollinen luvulla 2^m. Lisäksi $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 > q - 1$. Vertailemalla alkutekijähajotelmia saadaan

$$q - 1 = 2^m, \qquad q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2.$$

Ratkaisun voi viimeistellä tästä eri tavoilla.

1. tapa. Idea: Sijoitetaan $q = 2^m + 1$ alkuperäiseen yhtälöön, sievennetään ja tutkitaan modulo 8.

Sijoitetaan ehto $q = 2^m + 1$ alkuperäiseen yhtälöön. Saadaan

$$2^m p^2 + 1 = (2^m + 1)^5 = 2^{5m} + 5 \cdot 2^{4m} + 10 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 5 \cdot 2^m + 1.$$

Vähentämällä 1 puolittain ja jakamalla luvulla 2^m saadaan

$$p^2 = 2^{4m} + 5 \cdot 2^{3m} + 10 \cdot 2^{2m} + 10 \cdot 2^m + 5.$$

Jos $m \geq 2$, saadaan että p^2 on muotoa $8k + 5$. Neliöluvut ovat kuitenkin muotoa $8k, 8k + 1$ tai $8k + 4$. Siis $m < 2$, eli $m = 1$. Täten $q = 3$ ja $2p^2 = 3^5 - 1 = 243$ eli $p^2 = 121$ eli $p = 11$. Kolmikko $(m, p, q) = (1, 11, 3)$ käy ratkaisuksi.

2. tapa. Idea: Rajataan $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ kahden neliöluvun väliin (kun $q > 3$).

Tapaus $q = 2$ ei tuota ratkaisuja ja tapauksessa $q = 3$ saadaan ratkaisu $(m, p, q) = (1, 11, 3)$. Oletetaan sitten $q \geq 5$.

Yritetään löytää sellainen lauseke $P(q)$ (jonka arvo on kokonaisluku), että riittävän suurilla q pätee

$$P(q)^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < (P(q) + 1)^2.$$

Tämä yhdistettynä tietoon $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2$ todistaa, ettei ratkaisuja ole: kokonaisluvun p tulisi olla kokonaislukujen $P(q)$ ja $P(q) + 1$ välissä.

Lähdetään kokeilemaan erilaisia polynomeja $P(q)$. Ensimmäinen arvaus on $P(q) = q^2$, joka on hieman liian pieni. Arvaus $P(q) = q^2 + q$ antaa $P(q)^2 = (q^2 + q)^2 = q^4 + 2q^3 + q^2$, mikä taas on hieman liian suuri: termin q^3 kertoimen tulee olla 1.

Kokeillaan siksi $P(q) = q^2 + \frac{q-1}{2}$ (missä vähennetään 1, jotta $P(q)$ on kokonaisluku kun $q \geq 5$ on alkuluku). Tällöin

$$P(q)^2 = \left(q^2 + \frac{q-1}{2}\right)^2 = q^4 + q^2(q-1) + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 = q^4 + q^3 - q^2 + \frac{q^2 - 2q + 1}{4}$$

ja

$$(P(q)+1)^2 = \left(q^2 + \frac{q+1}{2}\right)^2 = q^4 + q^2(q+1) + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 = q^4 + q^3 + q^2 + \frac{q^2 + 2q + 1}{4}.$$

On selvää, että $P(q)^2 < q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$. Epäyhtälö $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 < (P(q)+1)^2$ sievenee muotoon

$$q + 1 < \frac{q^2 + 2q + 1}{4}$$

eli kertomalla puolittain neljällä ja sieventämällä

$$0 < q^2 - 2q - 3.$$

Tämä pätee, kun $q > 3$. Yhtälöllä ei siis ole ratkaisuja, joissa $q > 3$.