Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 31.1.2014

1. *Laske lausekkeen*

$$x^2 + y^2 + z^2$$

arvo, kun

$$x + y + z = 13, \qquad xyz = 72 \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}.$$

Vastaus. $x^2 + y^2 + z^2 = 61$.

Ratkaisu. Idea on ensin laskea $xy+yz+zx$, mistä tutkimalla yhtälöä $(x+y+z)^2 = 169$ saadaan vastaus.

Huomataan, että

$$xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 72 \cdot \frac{3}{4} = 54.$$

Täten

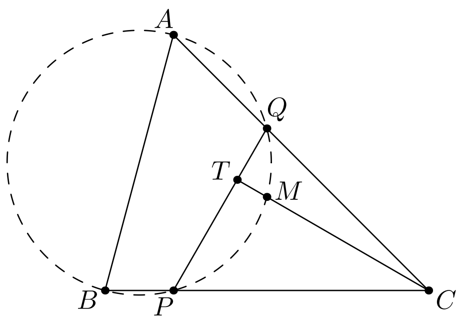
$$169 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 108,$$

joten $x^2 + y^2 + z^2 = 169 - 108 = 61$.

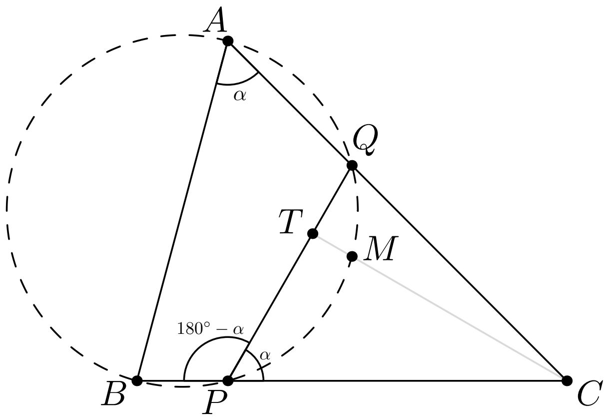
2. *Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on M ja pisteiden A, B ja M kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivut BC ja AC pisteissä P ja Q. Osoita, että janan CM jatke leikkaa kohtisuorasti janaa PQ.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea kulmia jännenelikulmioiden ja kehäkulmalauseen keskuskulmaversion avulla.

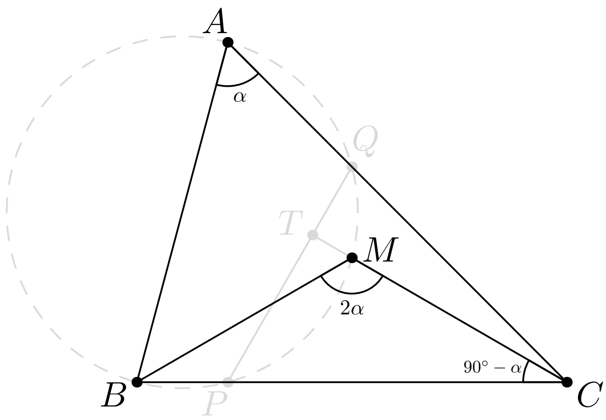
Kuva tilanteesta, missä T on suorien PQ ja CM leikkauspiste.



Ideana on laskea kolmiosta CPT kulmat $\angle CPT$ ja $\angle TCP$. Kulma $\angle CPT$ saadaan laskettua hyödyntämällä jännenelikulmiota $AQPB$, jonka vastakkaisten kulmien summa on $180°$.



Kulma $\angle TCP$ saadaan laskettua kolmiota ja sen ympärysympyrän keskipistettä koskevasta kuviosta: kehäkulmalauseen keskuskulmaversio sanoo $\angle BMC = 2\alpha$, ja BMC on tasakylkinen kolmio.



Siis kolmion CPT kahden kulman summa on $90°$, joten kolmas kulma on $90°$, mikä on haluttu väite.

3. *Pisteet $P = (a, b)$ ja $Q = (c, d)$ ovat xy-tason ensimmäisessä neljännekessä sekä a, b, c ja d ovat kokonaislukuja, joille $a < b, a < c, b < d$ ja $c < d$.* Reitti *pisteestä P pisteeseen Q on positiivisten koordinaattiakselien suuntaisista, yksikön pituisista askelista muodostuva murtoviiva, ja* sallittu reitti *on reitti, joka ei leikkaa eikä kosketa suoraa $x = y$. Montako sallittua reittiä on?*

Vastaus. Jos $c < b$, sallittuja reittejä on

$$\binom{c-a+d-b}{d-b}$$

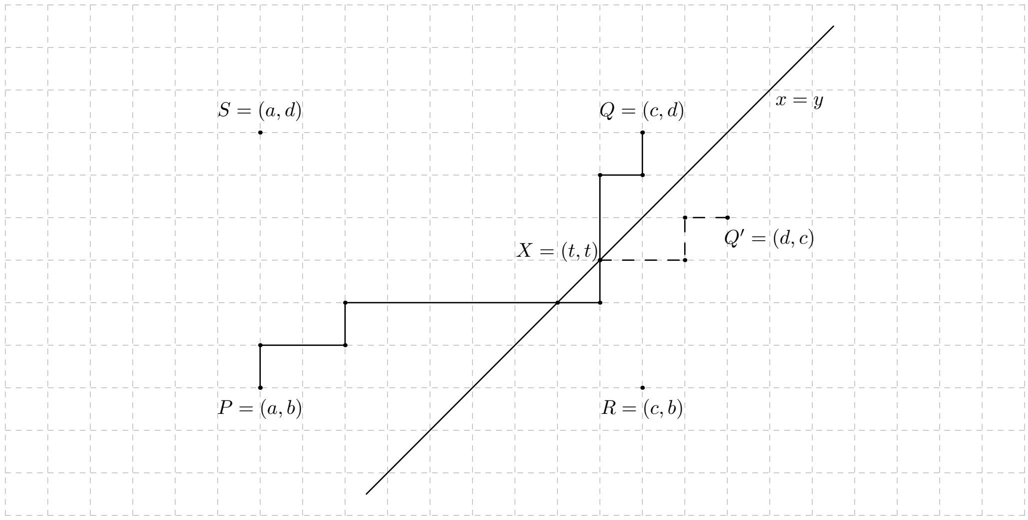
kappaletta, ja jos $c \geq b$, sallittuja reittejä on

$$\binom{c-a+d-b}{d-b} - \binom{d-a+c-b}{c-b}$$

kappaletta.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia ei-sallittuja reittejä ja tehdä niille tietynlainen operaatio, jotta saadaan helpommin käsiteltäviä reittejä.

Alla on kuva, jossa on esimerkki ei-sallitusta reitistä sekä muita apupisteitä ja -janoja.



Osoitetaan ensiksi, että reittejä (ei-sallitut mukaan lukien) on

$$\binom{c-a+d-b}{d-b}$$

kappaletta. Reitti koostuu $n = (c-a) + (d-b)$ askeleesta. Näistä $k = d - b$ on y-akselin suuntaisia ("ylöspäin") ja loput ovat x-akselin suuntaisia ("oikealle"). Ylöspäin suuntautuneiden askelien sijoittuminen reitille määrittää sen yksikäsitteisesti, ja näiden paikat voidaan valita $\binom{n}{k}$ tavalla. Siis kaikkia reittejä on $\binom{c-a+d-b}{d-b}$ kappaletta.

Jos $c < b$, niin kuvan suorakulmio $PRQS$ on kokonaan suoran $x = y$ yläpuolella, ja kaikki reitit ovat sallittuja reittejä. Oletetaan sitten, että $b \leq c$ (kuten kuvassa).

Lasketaan ei-sallittujen eli *kiellettyjen* reittien määrä. Jokaiselle kielletylle reitille kuuluu yksi tai useampi suoran $x = y$ piste eli piste muotoa (t, t). Olkoon $X = (t, t)$ se näistä, joissa t on suurin. Peilataan nyt ei-sallitun reitin osuus X:stä Q:hun suoran $y = x$ suhteen. Kun reitin alkuosa jätetään muuttamatta, saadaan reitti P:stä pisteeseen $Q' = (d, c)$.

Miettimällä hieman huomataan, että kukin reitti pisteestä P pisteeseen Q' vastaa kiellettyä reittiä pisteestä P pisteeseen Q, jolle on tehty yllä kuvailtu peilausoperaatio, ja päinvastoin. Kiellettyjä reittejä on siis yhtä paljon kuin reittejä pisteestä P pisteeseen Q'. Näitä on, samaan tapaan kuin aiemmin, $\binom{d-a+c-b}{c-b}$ kappaletta. Täten sallittuja reittejä on

$$\binom{c-a+d-b}{d-b} - \binom{d-a+c-b}{c-b}.$$

Kommentti. Tämä haastava tehtävä yleistää *Catalanin lukuja*, jotka kertovat sallittujen reittien määrän pisteestä $(0, 1)$ pisteeseen $(n, n+1)$. Catalanin luvuilla on monenlaisia kombinatorisia tulkintoja.

4. *Ympyrän säde r on pariton kokonaisluku. Ympyrällä on piste (p^m, q^n), missä p ja q ovat alkulukuja sekä m ja n positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi ympyrä on origokeskinen. Määritä säde r.*

Vastaus. Pätee $r = 5$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia saatavia Diofantoksen yhtälöitä, jakaa niitä tekijöihin ja tutkia tekijöiden alkutekijähajotelmia.

Koska piste (p^m, q^n) on ympyrällä $x^2 + y^2 = r^2$, niin

$$p^{2m} + q^{2n} = r^2. \tag{1}$$

Koska r on pariton, tasan toisen luvuista p ja q on oltava parillinen. Symmetrian nojalla voidaan olettaa että p on parillinen, ja koska p on alkuluku, niin $p = 2$. Yhtälö (1) muuttuu muotoon

$$2^{2m} = r^2 - (q^n)^2 = (r + q^n)(r - q^n).$$

Oikean puolen tulon molemmat tekijät ovat kakkosen potensseja, eli joillakin epänegatiivisilla kokonaisluvuilla $u > v$ pätee

$$\begin{cases} r + q^n &= 2^u, \\ r - q^n &= 2^v \end{cases} \tag{2}$$

ja $u + v = 2m$.

Yhtälöparista (2) saadaan ratkaistua

$$2q^n = 2^u - 2^v.$$

Tämä vaatii $v \geq 1$, jolloin $q^n = 2^{u-1} - 2^{v-1}$. Koska q on pariton, pätee $v = 1$ ja $u = 2m - 1$, joten

$$q^n = 2^{2m-2} - 1. \tag{3}$$

Oikea puoli jakautuu tekijöihin kahden neliön erotuksena:

$$q^n = (2^{m-1} - 1)(2^{m-1} + 1).$$

Selvästi $m = 1$ ei ole mahdollinen, joten $m \geq 2$. Oikean puolen tekijät ovat kaksi peräkkäistä paritonta lukua, joten niillä ei ole yhteisiä tekijöitä. Koska q on alkuluku, seuraa tästä $2^{m-1} - 1 = 1$ eli $m = 2$.

Nyt yhtälön (3) nojalla $q^n = 2^2 - 1 = 3$, eli $n = 1, q = 3$, ja edelleen yhtälöstä (1) saadaan

$$r^2 = p^{2m} + q^{2n} = 2^4 + 3^2 = 25$$

eli

$$r = 5.$$

Kommentti. Toinen lähestymistapa: Kun on saatu $p = 2$, tutkimalla yhtälöä (1) modulo 3 saadaan $q = 3$. Yhtälöä $2^{2m} + 3^{2n} = r^2$ voi tutkia samanlaisin menetelmin kuin yllä tai *Pythagoraan kolmikoiden* teorian avulla. Yksityiskohtia ei esitetä tässä.

5. *Määritä pienin luku $n \in \mathbb{Z}_+$, joka voidaan esittää muodossa $n = \sum_{a \in A} a^2$, missä A on äärellinen joukko positiivisia kokonaislukuja ja $\sum_{a \in A} a = 2014$. Toisin sanoen: mikä on pienin positiivinen kokonaisluku, joka voidaan esittää summana eri positiivisten kokonaislukujen neliöitä, missä kokonaisluvut summautuvat luvuksi 2014?*

Vastaus. Pienin tällainen luku on

$$\sum_{k=1}^{63} k^2 - 2^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 63^2 = 85340.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia, mitä ominaisuuksia minimin saavuttavalla joukolla A on.

Olkoon A positiivisten kokonaislukujen joukko, jolla $\sum_{a \in A} a = 2014$ ja jolla $\sum_{a \in A} a^2$ on pienin mahdollinen.

Väite 1. A:n pienin luku on 1 tai 2.

Perustelu: Oletetaan, että A:n pienin alkio a on vähintään kolme. Mutta nyt a voitaisiin korvata luvuilla 1 ja $a-1$: lukujen summa ei muutu, kaikki luvut ovat edelleen erisuuria (koska $a \geq 3$) ja neliöiden summa pienenee, sillä

$$(a-1)^2 + 1^2 = a^2 - 2a + 2 < a^2$$

(kun $a \geq 2$).

Väite 2. Jos a ja b, $a < b$ ovat A:n kaksi (suuruusjärjestyksessä) peräkkäistä alkiota, niin $b = a + 1$ tai $b = a + 2$.

Perustelu: Jos $b \geq a + 3$, niin voitaisiin korvata luvut a ja b luvuilla $a + 1$ ja $b - 1$: taas lukujen summa ei muutu ja luvut ovat erisuuria, ja neliöiden summa pienenee, koska

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 + 2(a-b) + 2 < a^2 + b^2,$$

kun $b \geq a + 3$.

Siis jos A:n luvut laitetaan järjestykseen $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, niin $a_1 = 1$ tai $a_1 = 2$ ja seuraava luku on aina enintään edellinen plus kaksi. Lisäksi ei voi olla kahta eri lukua a_i ja a_j, $i < j$, joilla $a_{i+1} = a_i + 2$ ja $a_{j+1} = a_j + 2$: muuten samaan tapaan kuin väitteessä 2 voitaisiin korvata luvut a_i, a_{j+1} luvuilla $a_i + 1, a_{j+1} - 1$. Siis jonossa on korkeintaan yksi kahden pituinen hyppy.

Todetaan sitten, että

$$\sum_{k=1}^{63} k = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016.$$

Ainoa joukko, joka täyttää edellä esitetyt ehdot ja jonka alkioiden summa on 2014, on

$$A = \{1, 3, 4, \ldots, 63\}.$$

(Joukon A suurimman alkion tulee olla vähintään 63. Jos suurin luku on 63, on yllä esitetty joukko ainoa vaihtoehto. Jos suurin luku on vähintään 64, on joukon lukujen summa vähintään $2 + 3 + 4 + \ldots + 61 + 62 + 64 = 2016 > 2014$.)

Joukon A neliöiden summa saadaan laskettua tunnetun kaavan

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

avulla:

$$\sum_{a \in A} a^2 = \frac{63 \cdot 64 \cdot 127}{6} - 2^2 = 85340.$$