Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisuehdotuksia 30.1.2015

1. *Ratkaise yhtälö*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x}$$

kun $x \geq 0$.

Vastaus. Yhtälöllä on yksi ratkaisu $x = 8$.

Ratkaisu. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen ideana on tehdä muuttujanvaihto $y = \sqrt[3]{x}$ ja tutkia syntynyttä polynomiyhtälöä suhteen. Toinen tekee muuttujanvaihdon $y = \sqrt{1+x}$.

1. ratkaisu. Oletetaan, että x on jokin yhtälön ratkaisu. Kirjoitetaan $x = y^3$ eli $y = \sqrt[3]{x}$, jolloin $y \geq 0$ kun $x \geq 0$. Tällöin pätee

$$\sqrt{1+\sqrt{1+y^3}} = y.$$

Neliöimällä saadaan

$$1+\sqrt{1+y^3} = y^2,$$

mistä vähentämällä puolittain 1 ja neliöimällä uudestaan saadaan

$$1+y^3 = (y^2-1)^2$$

eli

$$y^4 - y^3 - 2y^2 = 0$$

eli

$$y^2(y^2-y-2) = 0.$$

Tällä on ratkaisut $y = 0$, $y = 2$ ja $y = -1$. Ratkaisua $y = 0$ vastaa $x = 0$, joka ei toteuta alkuperäistä yhtälöä. Negatiivinen arvo $y = -1$ ei käy. Arvo $y = 2$ vastaa arvoa $x = 8$, jonka nähdään toteuttavan alkuperäinen yhtälö.

2. ratkaisu. Olkoon x taas jokin yhtälön ratkaisu. Kirjoitetaan $y = \sqrt{1+x}$, jolloin $y \geq 1$ ja $y^2 = 1+x$ eli $x = y^2 - 1$. Tutkittava yhtälö on

$$\sqrt{1+y} = \sqrt[3]{y^2-1}.$$

Korottamalla kuudenteen potenssiin saadaan

$$(1+y)^3 = (y^2-1)^2 = (y+1)^2(y-1)^2.$$

Tapaus $y+1=0$ ei vastaa mitään x:n arvoa, ja muussa tapauksessa

$$1+y = (y-1)^2$$

eli

$$y^2 - 3y = 0.$$

Tällä on ratkaisut $y = 0$ ja $y = 3$, joista ensimmäinen ei käy ja jälkimmäinen vastaa x:n arvoa $x = 8$. Se toteuttaa alkuperäisen yhtälön.

2. *Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjan särmä on a. Olkoon $ABCD$ pyramidin pohja, E huippu ja F sivusärmän CE keskipiste. Oletetaan, että kolmio BDF on tasasivuinen. Laske pyramidin tilavuus.*

Vastaus. Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{2}}a^3$.

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on laskea pisteen F korkeus pyramidin pohjaan nähden tilavuuden laskemiseksi.

Olkoon E' neliön $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste. Koska $ABCDE$ on suora pyramidi, EE' on sen korkeusjana. Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}a^2|EE'|$, joten pyritään laskemaan EE'.
Olkoon F' se janan AC piste, jolle $FF' \perp AC$. Nyt F' on janan $E'C$ keskipiste ja yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista $EE'C$ ja $FF'C$ nähdään, että $EE' = 2 \cdot FF'$. Lasketaan FF'.
Tasasivuisen kolmion BDF sivun pituus on $\sqrt{2}a$, ja jana FE' on tämän kolmion korkeusjana, joten $FE' = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.
Suorakulmaisessa kolmiossa $E'F'F$ lyhyempi kateetti $E'F'$ on $\sqrt{2}a/4$ ja hypotenuusa on $\frac{\sqrt{6}}{2}a$, joten Pythagoraan lauseella

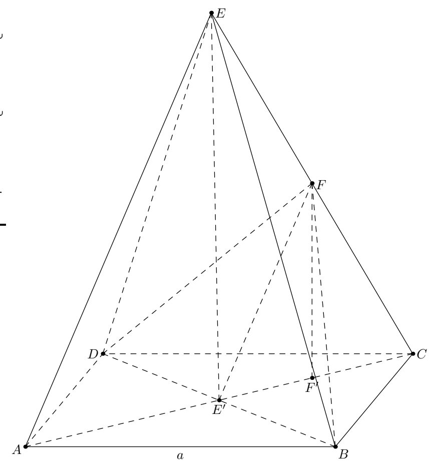
$$FF'^2 = FE'^2 - E'F'^2 = \left(\frac{6}{4} - \frac{1}{8}\right)a^2 = \frac{11}{8}a^2.$$

Siis

$$FF' = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}a, \qquad EE' = \sqrt{\frac{11}{2}}a$$

ja täten pyramidin tilavuus on

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{2}}a^3.$$



3. *Merkintä $n!$ (luvun n kertoma) tarkoittaa n:n pienimmän positiivisen kokonaisluvun tuloa $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Määritä suurin positiivinen kokonaisluku k, jolla 12^k on luvun $120!$ tekijä.*

Vastaus. Suurin tällainen k on $k = 58$.

Ratkaisu. Ideana on laskea kakkosten ja kolmosten määrät luvun 120! alkutekijähajotelmassa.

Tutkitaan, mikä on luvun 3 eksponentti luvun 120! alkutekijähajotelmassa. Tulossa on 40 kolmella jaollista lukua $3n, 1 \leq 3n \leq 120$. Koska $9 \cdot 13 = 117$, on tulossa lisäksi 13 yhdeksällä jaollista lukua $1 \leq 9n \leq 120$. Edelleen tulossa on neljä lukua muotoa $27n \leq 120$ ja yksi luku muotoa $81n \leq 120$. Täten kolmosen eksponentti on

$40 + 13 + 4 + 1 = 58$.

Vastaavaan tapaan kakkosen eksponentti on $60 + 30 + 15 + 7 + 3 + 1 = 116$.

Täten luku $12^k = 2^{2k}3^k$ jakaa luvun $120!$ täsmälleen silloin, kun $2k \le 116$ ja $k \le 58$, eli täsmälleen silloin kun $k \le 58$. Suurin kelpaava k on siten $k = 58$.

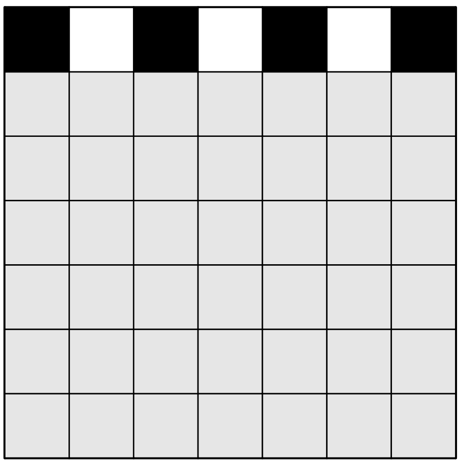
4. *Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Väritetään $n \times n$-ruudukon jokainen ruutu mustaksi tai valkoiseksi. Kuinka monella tavalla ruudukko voidaan värittää, jos vaaditaan, että jokainen vierekkäisistä ruuduista koostuva 2×2-neliö sisältää kaksi mustaa ja kaksi valkoista ruutua? Laudan ruudut on nimetty (esim. kuten shakkilaudassa), joten kiertämällä toisistaan saatavat väritykset ovat yleensä eri värityksiä.*

Vastaus. Värityksiä on $2^{n+1} - 2$ kappaletta.

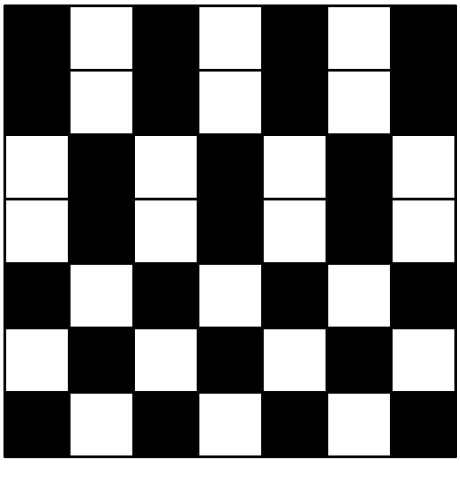
Ratkaisu. Ratkaisun idea on lähteä liikkeelle siitä, että ylin rivi on väritetty jotenkin ja tutkia, mitä tämä kertoo muiden ruutujen väreistä.

Tutkitaan, miten ylin rivi on väritetty. Tutkitaan erikseen kaksi tapausta.

Tapaus 1. Ylimmällä rivillä joka toinen ruutu on musta ja joka toinen valkoinen.

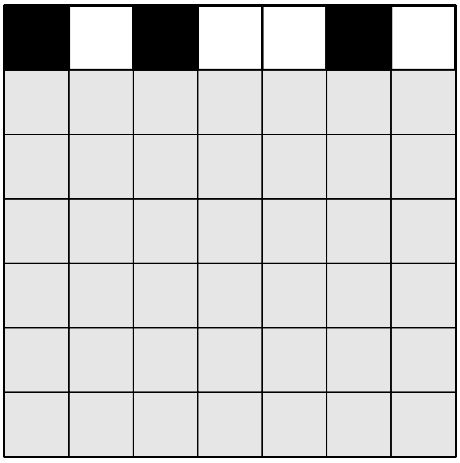


Huomataan, että myös seuraavalla rivillä on sama ominaisuus, ja induktiivisesti kaikilla alemmilla riveillä on tämä ominaisuus. Väritys voi kuitenkin aina alkaa mustasta tai valkoisesta.

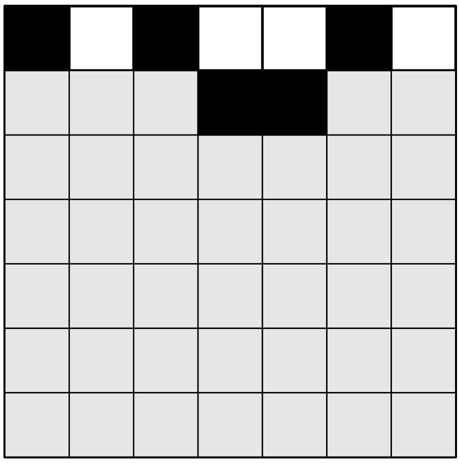


Jokaisella n rivistä on 2 vaihtoehtoa, joten tähän tapaukseen kuuluu 2^n väritystä.

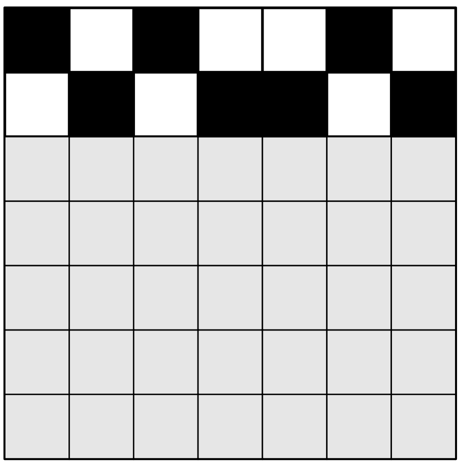
Tapaus 2. Ylimmällä rivillä on jotkin kaksi vierekkäistä samanväristä ruutua.



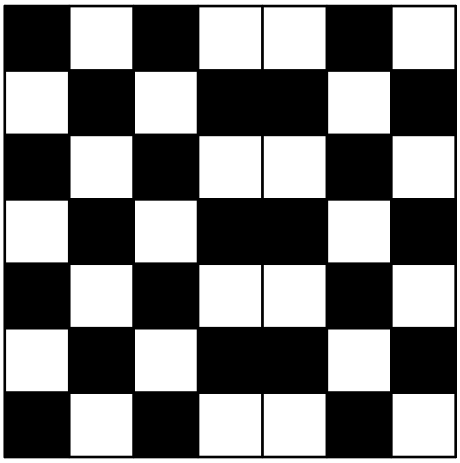
Näiden kahden samanvärisen ruudun alla olevien ruutujen värit määräytyvät nyt yksikäsitteisesti.



Tästä määräytyy loppujenkin tämän rivin ruutujen värit.



Vastaavasti määräytyy kaikki loputkin rivit.



Yleisesti ylimmän rivin väritys määrää muiden rivien värit, jos ylimmällä rivillä on jotkin kaksi vierekkäistä samanväristä ruutua. Kaikki paitsi kaksi ylimmän rivin 2^n värityksestä ovat tällaisia, joten tähän tapaukseen kuuluu $2^n - 2$ väritystä.

Yhteensä värityksiä on siis $2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$ kappaletta.

5. *Mikko on monivalintakokeessa. Hänen ainoa tavoitteensa on päästä kokeesta läpi. Kymmenen tehtävän koe on hyväksytty, jos kokelas saa vähintään seitsemän pistettä. Oikea vaihtoehto on yhden pisteen arvoinen ja väärästä vaihtoehdosta menettää yhden pisteen. Mikko tietää varmasti osaavansa kuusi ensimmäistä tehtävää, ja hän arvioi osaavansa vastata todennäköisyydellä p oikein mihin tahansa lopuista tehtävistä, missä $0 < p < 1$. Kuinka moneen tehtävään Mikon kannattaa vastata?*

Vastaus. Jos $p > \frac{1}{2}$, Mikon kannattaa vastata yhdeksään tehtävään. Jos $p < \frac{1}{2}$, Mikon kannattaa vastata seitsemään tehtävään. Jos $p = \frac{1}{2}$, seitsemän ja yhdeksän vastausta ovat yhtä hyviä ja parhaat vaihtoehdot.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ensiksi poissulkea kahdeksaan tai kymmeneen tehtävään vastaaminen, ja sitten verrata seitsemää ja yhdeksää vastausta epäyhtälön avulla.

On järkevämpi vastata seitsemään tehtävään kuin kahdeksaan: Seitsemään vastattuaan tilanne on hyvä, jos vastaus seitsemänteen oli oikein. Oikea vastaus kahdeksanteen ei silloin hyödynnä mitään, ja väärä vastaus puolestaan kumoaa oikean vastauksen seitsemänteen. Jos taas seitsemännen tehtävän vastaus on väärin, ei kahdeksannen tehtävän vastauksella voi tilannetta pelastaa.

Vastaavasti ei kannata vastata kymmeneen tehtävään, vaan korkeintaan yhdeksään.

Vertaillaan nyt todennäköisyyksiä vastatessa seitsemään tai yhdeksään tehtävään.

Vastatessa seitsemään tehtävään todennäköisyys päästä läpi on p ja todennäköisyys tulla hylätyksi on $1 - p$.

Vastatessa yhdeksään tehtävää on saatava vähintään kaksi arvatuista vastauksista oikein, jos haluaa päästä läpi. Todennäköisyys tälle on $p^3 + 3p^2(1 - p)$.

Selvitetään nyt, milloin

$$p^3 + 3p^2(1-p) > p.$$

Koska $p > 0$, epäyhtälö voidaan sieventää muotoon

$$p^2 + 3p(1-p) > 1$$

eli

$$-2p^2 + 3p - 1 > 0,$$

joka puolestaan sievenee muotoon

$$p^2 - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2} < 0.$$

Vastaavan yhtälön nollakohdat ovat 1 ja $\frac{1}{2}$, mistä nähdään tulomuoto

$$(p-1)\left(p - \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Epäyhtälö pätee siis, jos $\frac{1}{2} < p < 1$, eli tällöin kannattaa vastata yhteensä yhdeksään. Jos $p = \frac{1}{2}$, ovat seitsemän ja yhdeksän vastausta yhtä hyvät. Jos taas $p < \frac{1}{2}$, kannattaa vastata vain seitsemään.