Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 22.1.2016

Tehtävien ratkaisuja

1. *Mitkä kolmiot toteuttavat yhtälön*

$$\frac{c^2 - a^2}{b} + \frac{b^2 - c^2}{a} = b - a,$$

kun a, b ja c ovat kolmion sivut?

Vastaus. Pätee $a = b$ tai $c^2 = a^2 + b^2$, eli kolmio on tasakylkinen tai suorakulmainen.

Ratkaisu. Ideana on kirjoittaa yhtälö polynomiyhtälöksi ja jakaa se tekijöihin.

Lisätään yhtälöön puolittain $a - b$ ja kerrotaan puolittain luvulla ab. Saadaan

$$a(c^2 - a^2) + b(b^2 - c^2) + ab(a - b) = 0.$$

Vasemman puolen saa jaettua tekijöihin, joista yksi on $a - b$. (Tähän vihjaa se, että $a = b$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu.) Yhtälön voi nimittäin kirjoittaa muodossa

$$(a - b)c^2 + ab(a - b) + b^3 - a^3 = 0$$

eli

$$(a - b)(c^2 + ab - (b^2 + ab + a^2)) = 0$$

eli

$$(a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Siis $a = b$ tai $c^2 = a^2 + b^2$, mistä saadaan alussa esitetty vastaus.

2. *Olkoon y positiivinen kokonaisluku, joka kirjoitetaan 9-kantaisessa lukujärjestelmässä pelkillä ykkösillä. Osoita, että y on kolmioluku, ts. jollakin positiivisella kokonaisluvulla n luku y on n:n pienimmän positiivisen kokonaisluvun summa.*

Ratkaisu. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen perustuu induktioon, toinen tekijöihinjakoon.

Molemmissa ratkaisuissa hyödynnetään tietoa siitä, että jos y:n 9-kantaisessa esityksessä on k numeroa, niin

$$y = (\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ kpl}})_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + \ldots + 9 + 1.$$

1. ratkaisu. Väite pitää paikkansa, kun y on yksi- tai kaksinumeroinen luku: $(1)_9 = 1$ ja $(11)_9 = 9 + 1 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Todistetaan tehtävän väite induktiolla.

Kolmioluvut tunnetusti ovat muotoa $n(n + 1)/2$, koska

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Oletetaan, että jollakin $k \geq 1$ se luku y, jonka 9-järjestelmäesitys koostuu k ykkösestä, on kolmioluku:

$$y = (\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ kpl}})_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + \ldots + 9 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nyt $k+1$:llä ykkösellä 9-järjestelmässä kirjoitettava luku on myös kolmioluku, sillä

$$\begin{aligned}(\underbrace{111\ldots11}_{k+1 \text{ kpl}})_9 &= 9^k + 9^{k-1} + \cdots + 9 + 1 = 9y + 1 = \frac{9n(n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (3n+1).\end{aligned}$$

Induktioaskel on näin otettu, joten todistus on valmis.

2. ratkaisu. Geometrisen lukujonon summakaavan nojalla

$$y = (\underbrace{111\ldots11}_{k \text{ kpl}})_9 = 9^{k-1} + 9^{k-2} + \cdots + 9 + 1 = \frac{9^k - 1}{8} = \frac{(3^k-1)(3^k+1)}{8}.$$

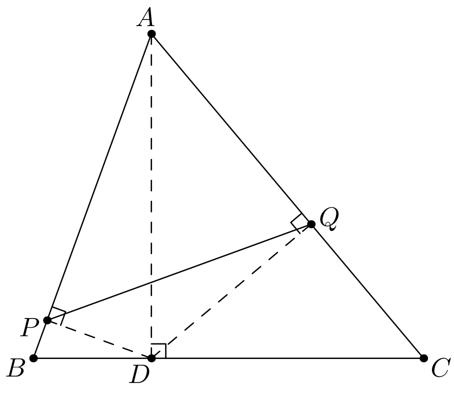
Koska 3^k on pariton, on olemassa kokonaisluku m_k, jolla $3^k = 2m_k + 1$. Nyt

$$y = \frac{(3^k-1)(3^k+1)}{8} = \frac{2m_k(2m_k+2)}{8} = \frac{m_k(m_k+1)}{2},$$

eli y on kolmioluku.

3. *Teräväkulmaisen kolmion yhden korkeusjanan kannasta lähtien piirretään normaalit kahta muuta sivua vastaan. Nämä normaalit kohtaavat toiset sivut pisteissä P ja Q. Osoita, että janan PQ pituus ei riipu siitä, mikä kolmesta korkeusjanasta valitaan.*

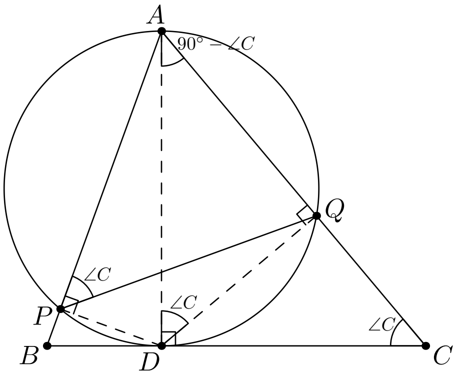
Ratkaisu. Ideana on ensiksi laskea yhdellä tavalla saatavan janan PQ pituus ja sitten verrata tätä muihin symmetrisiin pituuksiin.



Huomataan ensiksi, että $APDQ$ on jännenelikulmio, jonka halkaisija on AD.

Huomataan sitten, että APQ ja ACB ovat yhdenmuotoisia, koska niillä on samat kulmat. Jos nimittäin $\angle ACB = \angle C$, niin suorakulmaisten kolmioiden ja jännenelikulmion avulla

$$\angle DAC = 90^\circ - \angle C, \qquad \angle QDA = \angle C, \qquad \angle QPA = \angle C.$$



Tämän avulla päästään käsiksi pituuteen PQ: yhdenmuotoisuuden nojalla

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{BC}{AB}$$

eli

$$PQ = AQ \cdot \frac{BC}{AB}.$$

Vielä pitää laskea AQ. Hyödynnetään tähän kahta suorakulmaisia kolmiota. Kolmiosta AQD saadaan

$$AQ = \sin(\angle C) \cdot AD$$

ja kolmiosta ADC saadaan laskettua korkeusjana:

$$AD = \sin(\angle C) \cdot AC.$$

Kaiken kaikkiaan

$$PQ = \sin(\angle C)^2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Entä jos olisimme tutkineet vaikkapa kärjestä B lähtevää korkeusjanaa? Samoilla laskuilla saadaan pituudelle lauseke joka on sama kuin yllä, mutta jossa A-kirjaimet ovat muuttuneet B-kirjaimiksi, B-kirjaimet C-kirjaimiksi ja C-kirjaimet A-kirjaimiksi.

Enää tulee siis tarkistaa, että

$$\sin(\angle C)^2 \cdot \frac{AC \cdot BC}{AB} = \sin(\angle A)^2 \frac{BA \cdot CA}{BC}.$$

Sieventämällä tämä muuttuu muotoon

$$\frac{BC^2}{\sin(\angle A)^2} = \frac{AB^2}{\sin(\angle C)^2}.$$

Tämä pätee sinilauseen nojalla.

Symmetrian perusteella kärjestä C piirretty korkeusjana antaa saman pituuden janalle PQ.

4. *Montako positiivisten kokonaislukujen ratkaisuparia* (a, b) *on olemassa yhtälölle*

$$(4a - b)(4b - a) = 1770^n,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku?

Vastaus. Ratkaisuja on $(n^2-1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$ kappaletta.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia yhtälön $xy = 1770^n$ ratkaisuja ja tutkia, mitkä parit (x, y) vastaavat jotakin paria (a, b).

Merkitään $4a - b = x$ ja $b - a = y$ ja tutkitaan yhtälöä $xy = 1770^n$. Jos (x, y) on tämän yhtälön ratkaisu, niin

$$15a = 4x + y \quad \text{ja} \quad 15b = x + 4y.$$

Jotta a on kokonaisluku, tulee luvun $4x + y$ olla viidellätoista, ja vastaavasti luvulle b.

Koska $xy = 1770^n$ ja luvun 1770 alkutekijähajotelma on

$$1770 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 59,$$

on vähintään toinen luvuista x ja y välttämättä jaollinen viidellä. Jotta $4x + y$ ja $x + 4y$ ovat jaollisia viidellä, tulee molempien luvuista x ja y olla jaolllisia viidellä. Vastaavasti huomataan, että lukujen x ja y tulee olla jaollisia kolmella. Kääntäen, jos x ja y ovat joallisia viidellätoista, niin myös a ja b ovat kokonaislukuja.

Enää tulee siis laskea, kuinka monta ratkaisuia yhtälöllä

$$xy = 1770^n$$

on, joissa sekä x että y ovat jaollisia viidellätoista. Tutkitaan lukujen alkutekijähajotelmia. Luvun x alkutekijähajotelman kakkosen eksponentti voi olla mikä vain luvuista $0, 1, \ldots, n$. Luvun 3 eksponentin tulee olla jokin luvuista $1, 2, \ldots, n-1$, jotta x ja y ovat jaollisia kolmella. Luvun 5 eksponentin tulee vastaavasti olla jokin luvuista $1, 2, \ldots, n-1$, ja luvun 59 eksponentti saa olla mikä vain luvuista $0, 1, \ldots, n$. Yhteensä ratkaisuja on siis

$$(n+1) \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n+1) = (n^2-1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1.$$

5. *Laputan hallitsija määrää valtion kaupunkien välille rakennettavaksi junaverkoston, joka noudattaa seuraavia sääntöjä:*

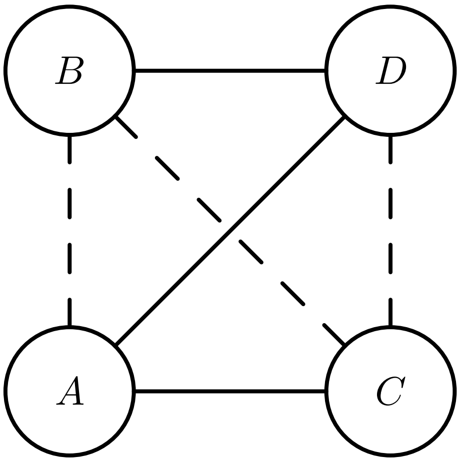
Yhdenäisyys: *Kustakin kaupungista pääsee kuhunkin toiseen kaupunkiin junalla mahdollisesti vaihtojen kautta*

N-kielto: *Ei ole sellaisia neljää kaupunkia A, B, C ja D, että A:sta olisi suora yhteys B:hen, B:stä C:hen ja C:stä D:hen, mutta oikaiseminen tällä reitillä ei olisi mahdollista: A:stä ei pääsisi suoraan C:hen, B:stä ei pääsisi suoraan D:hen eikä A:sta D:hen.*

Lisäksi suora lentolautasyhteys perustetaan täsmälleen niiden kaupunkiparien välille, joiden välillä ei ole suoraa junayhteyttä. Todista, että lentolautasverkosto ei ole yhtenäinen, kun kaupunkeja on useampi kuin yksi.

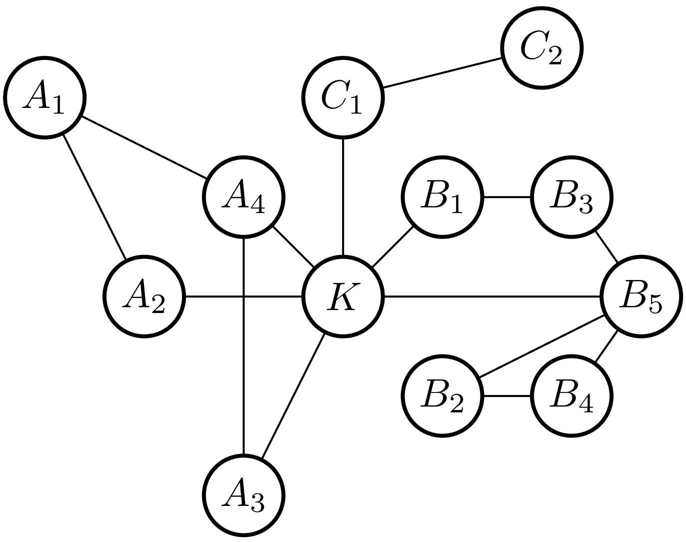
Ratkaisu. Ratkaisun idea on tehdä vastaoletus, huomata rata- ja lentolautasverkoston ehtojen symmetrisyys ja tutkia minimaalista vastaesimerkkiä ristiriidan saamiseksi.

Tehdään vastaoletus: lentolautasverkosto on yhtenäinen. Tällöin huomataan, että tilanne on symmetrinen: sekä rata- että lentolautasverkosto ovat yhtenäisiä ja N-kielto on voimassa myös lentolautasverkostolle. Jos nimittäin kaupungit A, B, C ja D muodostaisivat N:n lentolautasille, niin B, D, A ja C muodostaisivat N:n junille. (Kuvissa junaverkostoa merkitään viivalla ja lentolautasverkostoa katkoviivalla.)



Verkostosta saattaa olla mahdollista poistaa kaupunkeja ilman, että tehtävän ehdot rikkoutuvat. Poistetaan niin monta kaupunkia, että vielä yhden poistaminen tekisi jommastakummasta liikenneverkosta epäyhtenäisen. (Tällainen kohta tulee välttämättä vastaan, koska kahden kaupungin tapauksessa jompikumpi verkoista on epäyhtenäinen.)

Oletetaan siis, että Laputan verkosto on minimaalinen. Symmetrian vuoksi oletetaan, että kaupungin K poistamisen jälkeen junaverkosto olisi epäyhtenäinen. Tämä tarkoittaa, että muut solmut voidaan jakaa ainakin kahteen eri joukkoon $A, B, \ldots$ niin, ettei niistä pääse toisiin junilla muuten kuin K:n kautta, mutta keskenään esimerkiksi joukon A kaupungeista pääsee toisiinsa kulkematta K:n kautta.



Toisaalta tiedämme, että minkä tahansa neljän kaupungin jonossa voi oikaista. Jos siis on olemassa esimerkiksi solmut A_i, A_j, K ja B_k niin, että väleillä A_i ja A_j, A_j

ja K sekä K ja B_k on junayhteydet, niin jonossa pitää pystyä oikaisemaan. Ainoa oikaisutapa on, että kaupungista A_i siirrytään suoraan kaupunkiin K. (Esimerkiksi kuvan jono A_1, A_2, K, B_1 ei käy: kaupungista A_1 pitää pystyä oikaisemaan kaupunkiin K.) Sama pätee myös muille joukoille kuin A ja B ja niiden kaupungeille.

Tästä seuraa, että mistä tahansa kaupungista pääsee suoraan junayhteydellä kaupunkiin K.

Tämä puolestaan tarkoittaa, että K:sta ei pääse lnetolautasyhteydellä mihinkään muuhun kaupunkiin, eli lentolautasverkko on epäyhtenäinen, ristiriita.