Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailu 2017, tehtävien ratkaisuja

1. *Kun kokonaislukua m jaetaan (jakokulmassa) kokonaisluvulla n, saadaan osamäärä 22 ja jakojäännös 5. Kun jakoa jatketaan, saadan osamäärän ensimmäiseksi desimaaliksi 4 ja jakojäännökseksi 2. Määritä m ja n.*

Vastaus. $m = 269$ ja $n = 12$.

Ratkaisu. Ensimmäinen ehto kertoo, että $m = 22n + 5$, ja toinen kertoo, että $5 = 0{,}4n + 2$. Jälkimmäinen yhtälö antaa heti $n = 12$, ja kun tämä sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, saadaan $m = 269$.

2. *Määritä $x^2 + y^2$ ja $x^4 + y^4$, kun $x^3 + y^3 = 2$ ja $x + y = 1$.*

Vastaus. $x^2 + y^2 = \frac{5}{3}$ ja $x^4 + y^4 = \frac{23}{9}$.

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on ensin laskea tulon xy arvo, ja hyödyntää tätä muiden lausekkeiden laskemiseksi.

Lasketaan ensin xy. Tehtävän ehtojen perusteella

$$1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 2 + 3xy,$$

joten $xy = -\frac{1}{3}$. Tämän avulla saadaan laskettua $x^2 + y^2$: pätee

$$1 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - \frac{2}{3},$$

eli $x^2 + y^2 = \frac{5}{3}$. Edelleen samalla idealla

$$\frac{25}{9} = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4 + \frac{2}{9}.$$

Siis $x^4 + y^4 = \frac{23}{9}$.

3. *Tarkastellaan positiivisia kokonaislukuja m ja n, joille $m > n$ ja luvun*

$$22\ 220\ 038^m - 22\ 220\ 038^n$$

lopussa on kahdeksan nollaa. Osoita, että $n > 7$.

Ratkaisu. Ideana on tutkia lukujen erotusta ja erityisesti sen alkutekijähajotelman kakkosten lukumäärää.

Olkoon

$$x = 22\ 220\ 038^m - 22\ 220\ 038^n = 22\ 220\ 038^n(22\ 220\ 038^{m-n} - 1).$$

Koska x päättyy kahdeksaan nollaan, se on jaollinen luvulla 10^8 ja siis luvulla 2^8. Sulkeissa oleva erotus on pariton, joten luvun $22\ 220\ 038^n$ on oltava jaollinen luvulla 2^8. Mutta

$$22\ 220\ 038^n = 2^n \cdot 11\ 110\ 019^n,$$

ja koska jälkimmäinen potenssi on pariton, jaollisuus 2^8:lla voi toteutua vain, jos $n \geq 8$.

Kommentti. Voi kysyä, onko sellaisia lukuja m ja n, joille x on jaollinen 10^8:lla. Kyllä. Kun tarkastellaan lukuja $22\,220\,038^k, 1 \leq k \leq 10^8 + 1$, niin jollain kahdella luvulla on välttämättä samat kahdeksan viimeistä numeroa. Niiden erotus kelpaa luvuksi x.

4. *Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Kahden pelaajan, Akselin ja Elinan, välinen peli HAUKKU(m) etenee seuraavasti: Akseli aloittaa, ja pelaajat valitsevat kokonaislukuja vuorotellen. Aluksi valittavien kokonaislukujen joukko on luvun m positiivisten tekijöiden joukko. Vuorossa oleva pelaaja valitsee yhden jäljellä olevista luvuista, ja valittavien lukujen listasta poistetaan tämä luku ja sen kaikki monikerrat. Pelaaja, joka joutuu valitsemaan luvun 1, häviää. Osoita, että aloittajalla eli Akselilla on voittostrategia pelissä HAUKKU(m) kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$.*

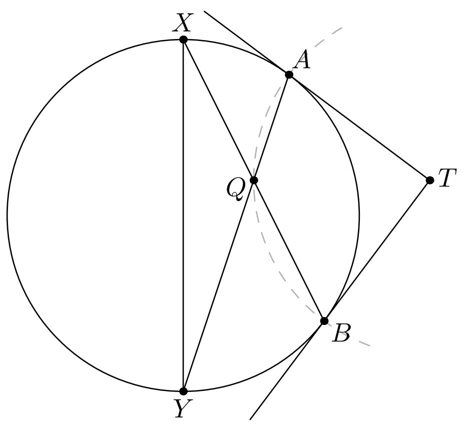
Ratkaisu. Ratkaisun idea on strategian varastus: Elinalla ei voi olla voittostrategiaa, koska Akseli voisi itse hyödyntää tätä strategiaa voittaakseen.

[Tehtävän tekstistä oli jäänyt pois oletus $m > 1$.]

Jompikumpi pelaajista voittaa aina. On mahdollista, että Akselilla on voittostrategia, jossa hänen ensimmäinen valintansa on m. Ellei näin ole, Elina voi valita jonkin m:n tekijän k ensimmäiseksi valinnakseen, ja voittaa. Mutta nyt Akseli voikin ensimmäiseksi valinnakseen ottaa k:n ja pelata niin kuin Elina olisi pelannut voittaakseen. Akselilla on siis voittostrategia.

Kommentti. Vaikka Akseli voittaa aina, niin peliin ei tunneta mitään yksinkertaista voittostrategiaa.

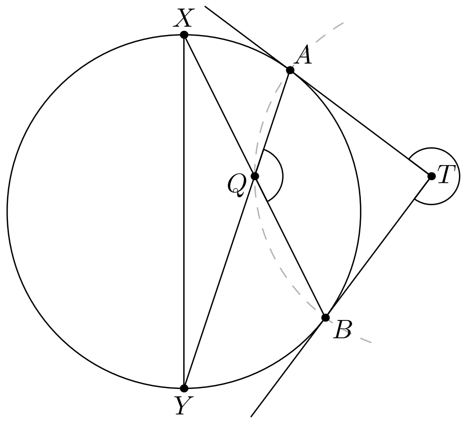
5. *Valitaan ympyrän kehältä mielivaltaisesti kaksi sellaista pistettä A ja B, että AB ei ole ympyrän halkaisija. Pisteisiin A ja B piirretyt ympyrän tangentit kohtaavat pisteessä T. Seuraavaksi valitaan halkaisija XY niin, että janat AX ja BY leikkaavat, olkoon tämä leikkauspiste Q. Osoita, että pisteet A, B ja Q ovat ympyrällä, jonka keskipiste on T.*



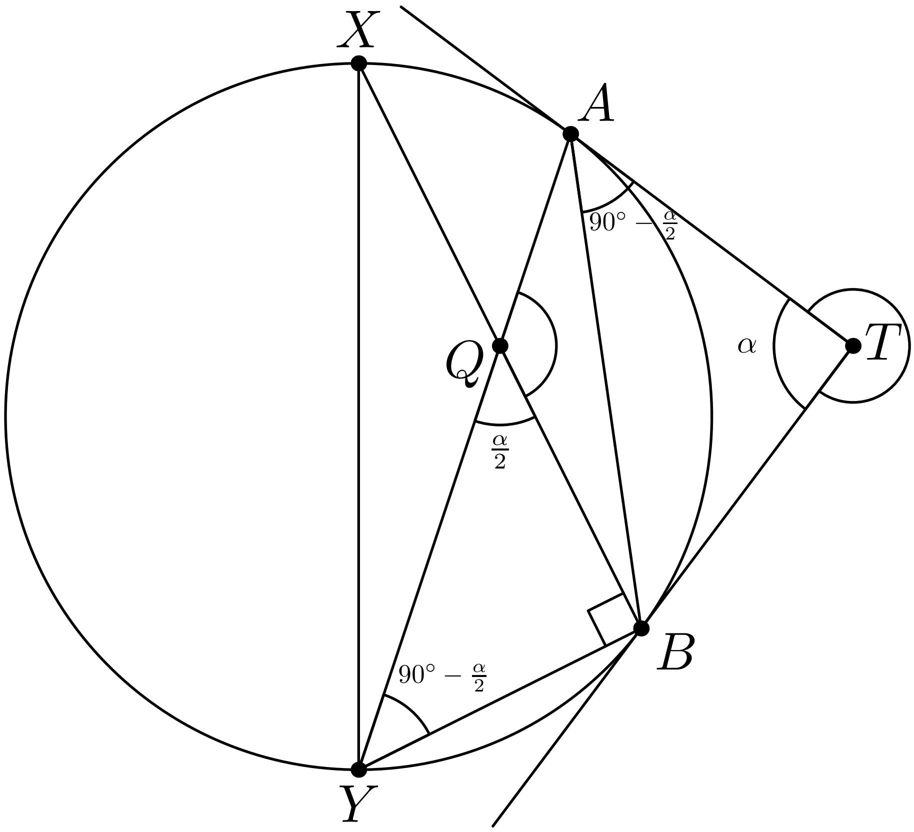
Ratkaisu. Esitetään kaksi hieman erilaista ratkaisua. Ensimmäisen idea on käyttää ovelalla tavalla kehäkulmalauseen keskuskulmaversiota. Toisen idea on piirtää kuvioon ympyrä ja apupiste ja laskea kulmia. Molemmat ratkaisut hyödyntävät kehäkulmalauseen tangenttiversiota.

1. ratkaisu. Tangentit ovat tunnetusti yhtä pitkiä, joten $TA = TB$. Pyritään osoittamaan, että myös Q on ympyrällä, jonka säde on TA ja keskipiste T.

Ideana on osoittaa, että kulma $\angle BQA$ on puolet kulmasta $\angle BTA$. (Siis siitä kulmasta $\angle BTA$, joka on yli 180 astetta.) Väite seuraa sitten tästä kehäkulmalauseen keskuskulmaversion perusteella.



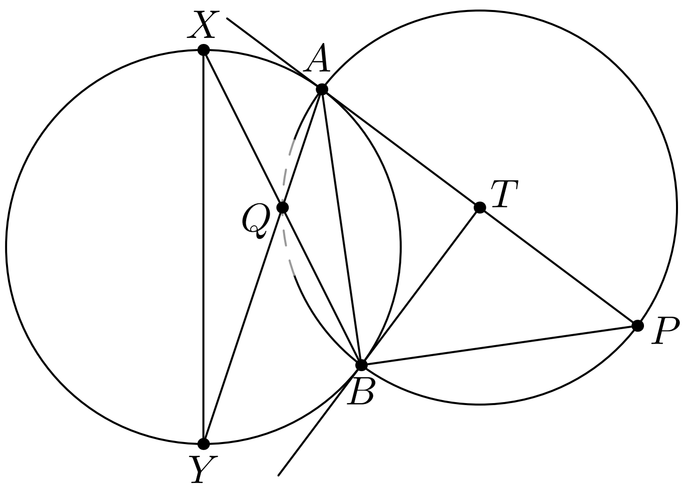
Lasketaan kulmia seuraavan kuvan mukaisesti.



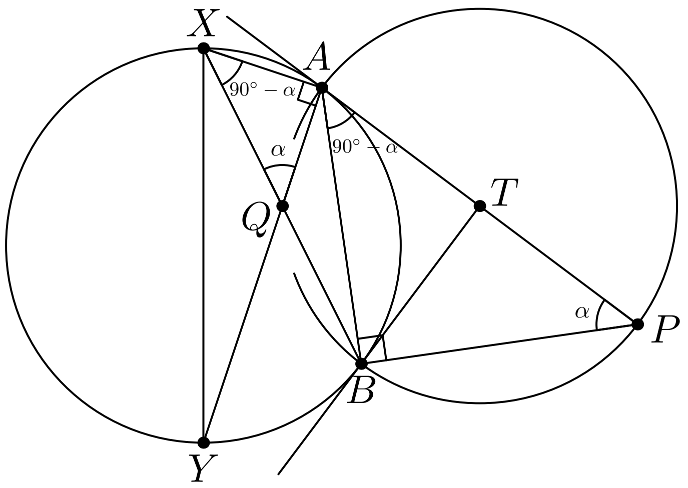
Merkitään $\angle ATB = \alpha$. Koska ATB on tasakylkinen, $\angle TAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Kehäkulmalauseen tangenttiversion nojalla $\angle BYQ = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Koska XY on ympyrän halkaisija, $\angle XBY$ on suora kulma. Täten $\angle YQB = \frac{\alpha}{2}$.

Siis $\angle BQA = 180° - \frac{\alpha}{2}$ ja $\angle BTA = 380° - \alpha$, mistä väite seuraa.

2. ratkaisu. Kuten ratkaisussa 1, tangentit ovat yhtä pitkiä ja siten $TA = TB$. Piirretään ympyrä, jonka säde on TA ja keskipiste T. Pyritään osoittamaan, että myös Q on tällä ympyrällä. Olkoon P janan AT jatkeen leikkaus ympyrän kanssa.



Riittää osoittaa, että $\angle AQX = \angle APB$. Todistetaan tämä laskemalla kulmia.



Merkitään $\angle AQX = \alpha$. Koska XY on halkaisija, $\angle XAQ$ on suora ja $\angle BXA = 90° - \alpha$. Kehäkulmalauseen tangenttiversion nojalla $\angle BAP = 90° - \alpha$. Koska myös $\angle PBA$ on suora, niin $\angle APB = \alpha$.

Kommentti. Ratkaisut perustuvat loppukädessä samaan ideaan: lasketaan $\angle BQA$ ja hyödynnetään jossakin kohdassa kehäkulmalauseen tangenttiversiota.