Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut 2018

1. *Eevalla ja Martilla on kokonaislukumäärä euroja. Martti sanoi Eevalle: "Jos annat minulle kolme euroa, niin minulla on n-kertainen määrä rahaa sinuun verrattuna". Eeva puolestaan sanoi Martille: "Jos sinä annat minulle n euroa, niin minulla on kolminkertainen määrä rahaa sinuun verrattuna". Oletetaan, että molemmat väitteet pitävät paikkansa. Mitä arvoja positiivinen kokonaisluku n voi saada?*

Vastaus. $n = 1, n = 2, n = 3$ ja $n = 7$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on pystyttää yhtälöpari ja ratkaista se hyödyntäen tietoa siitä, että luvut ovat kokonaislukuja.

Olkoon x Martin rahamäärä ja y Eevan rahamäärä. Tällöin

$$\begin{aligned} x + 3 &= n(y - 3) \\ y + n &= 3(x - n). \end{aligned}$$

Kun ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan $x = n(y - 3) - 3$ ja sijoitetaan alempaan, saadaan

$$y + n = 3(n(y - 3) - 3 - n) = 3ny - 12 - 9$$

eli

$$y + 9 = 3ny - 13n = n(3y - 13).$$

Koska $y+9 > 0$ ja $n > 0$, niin myös $3y-13 > 0$. Lisäksi huomataan, että $3y-13 \mid y+9$ eli $3y-13$ jakaa luvun $y+9$. Tästä seuraa $3y-13 \mid 3(y+9)-(3y-13) = 27+13 = 40$, joten koska $3y - 13 > 0$, saadaan

$$3y - 13 \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}.$$

Toisaalta $3y - 13 \equiv -13 \equiv 2 \pmod 3$, joten jäljelle jäävät vain vaihtoehdot

$$3y - 13 \in \{2, 5, 8, 20\},$$

mistä saadaan

$$y \in \{5, 6, 7, 11\}.$$

Vastaavat luvun n arvot saadaan yhtälöstä $n = (y + 9)/(3y - 13)$:

$$n \in \{1, 2, 3, 7\}.$$

Lisäksi huomataan, että kukin näistä n:n ja y:n arvoista antavat x:n arvon, joka myös on kokonaisluku. Siis kaikki nämä n:n arvot ovat mahdollisia.

2. *Kolmion ABC sivut ovat $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$. Pisteet D, E ja F ovat sellaiset sivujen BC, CA ja AB pisteet, että AD, BE ja CF ovat kolmion ABC kulmien puolittajia. Määritä janojen AD, BE ja CF pituudet a:n, b:n ja c:n avulla.*

Vastaus. Pätee

$$|BE| = \frac{\sqrt{ac}}{a + c}\sqrt{(a + b + c)(a - b + c)},$$

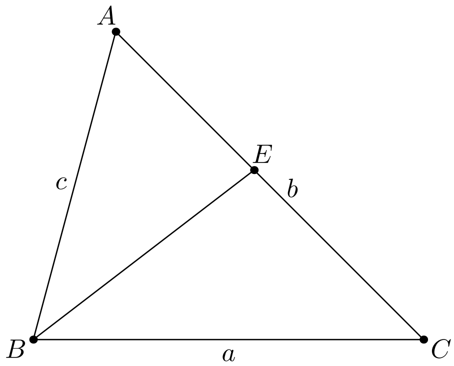
ja symmetrisesti

$$|AD| = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$$

ja

$$|CF| = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on käyttää kulmanpuolittajalausetta ja kosinilausetta (kahdesti) pituuksien laskemiseksi.



Lasketaan ensiksi pituus AE. Merkitään $AE = x$. Kulmapuolittajalauseen nojalla

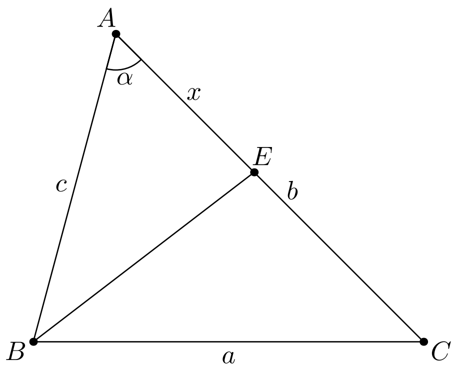
$$\frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC}$$

eli

$$\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a}.$$

Kertomalla auki saadaan ensimmäisen asteen yhtälö, josta ratkaistaan

$$x = \frac{bc}{a+c}.$$



Ideana on sitten laskea BE kolmiosta ABE kosinilauseen avulla. Jos merkitään $\alpha = \angle BAC$, niin kosinilauseen nojalla

$$BE^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos(\alpha).$$

Termi $\cos(\alpha)$ pitää vielä esittää sivujen a, b, c avulla. Tämä onnistuu kosinilauseella kolmioon ABC:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

Tästä saadaan ratkaistua

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},$$

ja siten

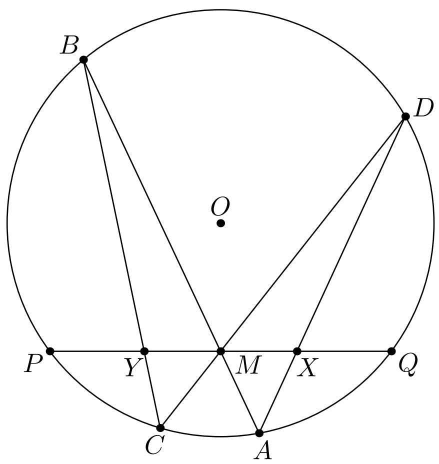
$$\begin{aligned} BE^2 &= c^2 + x^2 - 2cx\cos(\alpha) \\ &= c^2 + \frac{(bc)^2}{(a+c)^2} - 2c\frac{bc}{a+c}\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}. \end{aligned}$$

Tätä voi sieventää eri tavoilla, esimerkiksi

$$\begin{aligned} BE^2 &= \frac{c^2(a+c)^2 + b^2c^2 - c(a+c)(c^2+b^2-a^2)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{c^2(a+c)^2 + b^2c^2 - c^2(c^2+b^2-a^2) - ac(c^2+b^2-a^2)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{c^2(a+c)^2 - c^4 + (ac)^2 - ac(c^2+b^2-a^2)}{(a+c)^2} \\ &= ac\frac{2c^2 + 2ac - (c^2+b^2-a^2)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{ac}{(a+c)^2}((a+c)^2 - b^2), \end{aligned}$$

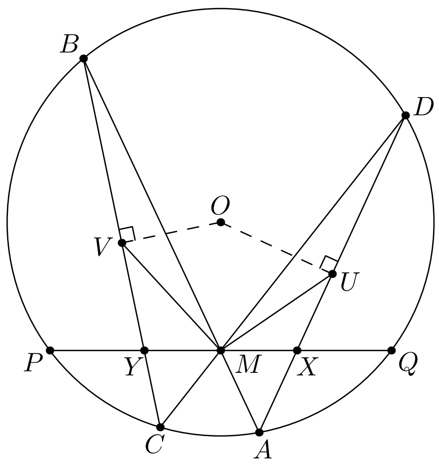
mistä alun vastaus seuraa kahden neliön erotuksella ja neliöjuuren ottamisella.

3. *Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat ympyrän sisällä pisteessä M, joka on lisäksi jänteen PQ keskipiste. Pisteet X ja Y ovat janojen AD ja PQ sekä BC ja PQ leikkauspisteet, tässä järjestyksessä. Osoita, että M on janan XY keskipiste.*

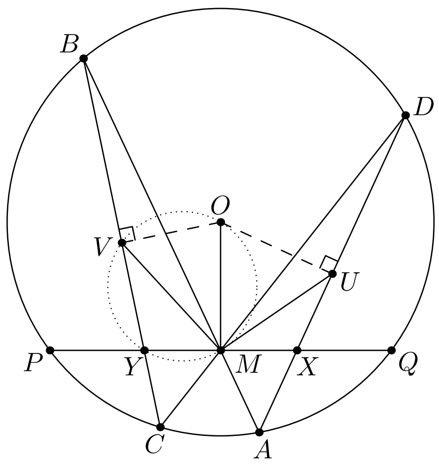


Ratkaisu. Ratkaisu perustuu apupisteisiin ja niiden avulla saataviin jännenelikulmioihin.

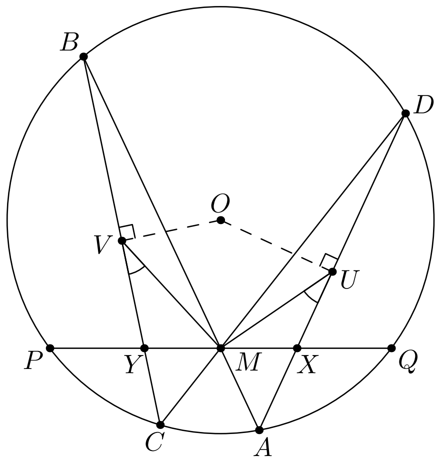
Piirretään kuvioon pisteestä O janoille DX ja BY korkeusjanat.



Koska M on janan PQ keskipiste, OM ja PQ ovat kohtisuorassa. Siis $OVYM$ ja $OUXM$ ovat jännenelikulmioita.



Lisäksi BMC ja DMA ovat yhdenmuotoisia kolmioita ja MV ja MU ovat niiden mediaaneja. Täten myös VMC ja UMA ovat yhdenmuotoisia. Erityisesti $\angle CVM = \angle MUA$.



Tämä tieto yhdistettynä edellä saatuihin jännenelikulmioihin antaa

$$\angle YOM = \angle MOX,$$

eli kolmion YOX korkeusjana OM on samalla kulmanpuolittaja, joten $MY = MX$.

Kommentti. Tehtävän tulos tunnetaan nimellä *perhoslause*. Tulokselle on monia todistuksia, mutta mikään niistä ei ole erityisen helppo. Tehtävän voi myös ratkaista ilman ylimääräisiä pisteitä käyttämällä toistuvasti sinilausetta muuttamaan tiedot kulmista tiedoiksi koskien pituuksia.

4. *Määritellään kuvaus $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ niin, että $f(1) = 1$ ja $f(n)$ on luvun n suurin alkutekijä, kun $n > 1$. Aino ja Väinö pelaavat peliä, jossa molemmilla on kasa kiviä. Jokaisella siirtovuorolla vuorossa oleva pelaaja, jolla on m kiveä kasassaan, saa poistaa toisen kasasta korkeintaan $f(m)$ kiveä mutta vähintään yhden kiven. (Oma kasa säilyy muuttumattomana.) Pelin voittaa se, joka ensiksi tyhjentää toisen kasan. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että Aino häviää parhaimmallakin pelitavalla, vaikka saa aloittaa ja molemmilla on aluksi yhtä monta eli n kiveä.*

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu siihen, että $n = 16$ toimii.

Osoitetaan, että $n = 16$ on Väinön voitto. Tutkitaan erikseen kahta tapausta sen mukaan, mitä Aino pelaa ensimmäisellä vuorollaan.

Tapaus 1. Aino poistaa Väinön kasasta 2 kiveä.

Väinöllä on kasassaan 14 kiveä, joten hän voi poistaa Ainon kasasta 7 kiveä. Ainolle jää 9 kiveä. Aino voi seuraavalla siirrollaan vähentää Väinön kivimäärän joksikin luvuista $11, 12$ ja 13. Ensimmäisessä ja viimeisesä tapauksessa Väinö voittaa seuraavalla vuorollaan.

Tilanne on siis Aino 9, Väinö 12, Väinön vuoro. Väinö vähentää Ainon kasasta yhden kiven. Ainolla on kaksi vaihtoehtoa, joista toinen häviää heti. Tilanne on Aino 8, Väinö 10, Väinön vuoro. Väinö vähentää Ainon kasasta viisi kiveä. Tästä on helppo nähdä, että Väinö voittaa.

Tapaus 2. Aino poistaa Väinön kasasta 1 kiven.

Väinö vastaa vähentämällä Ainon kasasta neljä kiveä. Tilanne on Aino 12, Väinö 15, Ainon vuoro.

Jos Aino poistaa Väinöltä kaksi kiveä, Aino häviää seuraavalla vuorolla.

Jos Aino poistaa Väinöltä yhden kiven, poistaa Väinö Ainon kasasta viisi kiveä. Olemme tapauksessa Aino 9, Väinö 14, Ainon vuoro, joka käsiteltiin jo tapauksessa 1.

Tutkitaan vielä tapaus, jossa Aino poistaa Väinöltä kolme kiveä. Tilanne on Aino 12, Väinö 12, Väinön vuoro. (Tässä kohtaa voisi jo oikeastaan todeta, että jos Väinö häviää, niin $n = 12$ kelpaisi tehtävänannon luvuksi. Osoitetaan nyt kuitenkin, että Väinö voittaa eli että $n = 16$ toimii.)

Väinö poistaa Ainolta kolme kiveä. Jos Aino poistaa yhden, Väinö voittaa heti. Jos Aino poistaa kaksi, tilanne on Aino 9, Väinö 10, Väinön vuoro. Nähdään, että poistamalla viisi kiveä Väinö tulee voittamaan.

Jos Aino poistaa kolme, tilanne on Aino 9, Väinö 9, Väinön vuoro. Väinö poistaa Ainolta yhden kiven, Ainon on pakko tehdä samoin. Tilanne 8–8, Väinön vuoro.

Väinö poistaa Ainolta kaksi kiveä. Ainon ainoa järkevä vastaus on myös poistaa kaksi. 6–6. Väinö voittaa pian poistamalla Ainolta kolme kiveä.

Kommentti. Miksi $n = 16$? On hyvä, että Ainolla on vain vähän vaihtoehtoja ensimmäisellä vuorollaan. Vähiten vaihtoehtoja on silloin, kun n on kakkosen potenssi. Lisäksi kokeilemalla nähdään, ettei pienemmät kakkosen potenssit $n = 1, 2, 4$ ja 8 toimi.

Voidaan osoittaa, että arvoilla $n \leq 15$ peli on Ainon voitto.

Tehtävän voi ratkaista myös yksinkertaisesti laskemalla kaikki voitto- ja häviötilat. Tilanteita, joissa molemmilla pelaajilla on enintään 16 kiveä, on $16^2 = 256$, joten laskemista tulee jonkin verran. (Kaikkia tiloja ei tosin tarvitse laskea tehtävän ratkaisemiseksi.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
2	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
3	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
4	H	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
5	H	H	H	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
6	H	H	H	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
7	H	H	H	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
8	H	H	H	H	V	H	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
9	H	H	H	H	V	H	V	H	V	V	V	V	V	V	V	V
10	H	H	H	H	H	H	V	H	V	V	V	V	V	V	V	V
11	H	H	H	H	H	H	V	H	V	V	V	V	V	V	V	V
12	H	H	H	H	H	H	H	H	H	V	V	V	V	V	V	V
13	H	H	H	H	H	H	H	H	H	V	V	H	V	V	V	V
14	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	V	H	V	V	V	V
15	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	V	H	V	V	V	V
16	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	V	H	V	V	V	H

5. *Ratkaise Diofantoksen yhtälö*

$$x^{2018} - y^{2018} = (xy)^{2017},$$

kun x ja y ovat epänegatiivisia kokonaislukuja.

Vastaus. Ainoa ratkaisu on $(x, y) = 0$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia alkutekijähajotelmien alkulukujen eksponentteja.

Jos toinen luvuista on nolla, on toisenkin oltava. Pari $(0, 0)$ on ratkaisu. Oletetaan nyt, että molemmat luvuista ovat nollasta poikkeavia. Nyt

$$x^{2018} > x^{2018} - y^{2018} = (xy)^{2017},$$

joten $x > y^{2017}$. Lisäksi molempien lukujen alkutekijöiden on oltava samat (jos $p \mid x$, niin myös $p \mid y$ ja päinvastoin). Koska $y < x$, on oltava alkuluku p, jolla pätee

$p^\alpha \mid x, p^{\alpha+1} \nmid x, p^\beta \mid y, p^{\beta+1} \nmid y$ ja $\alpha > \beta$. Merkitään tätä $v_p(x) = \alpha, v_p(y) = \beta$. Nyt

$$v_p(x^{2018}) = 2018\alpha, \quad v_p(y^{2018}) = 2018\beta \quad \text{ja} \quad v_p((xy)^{2017}) = 2017(\alpha+\beta).$$

Erityisesti siis

$$v_p(y^{2018}) \geq \min(2017(\alpha+\beta), 2018\alpha).$$

Koska $2018\alpha > 2018\beta$, on pädettävä $2017(\alpha+\beta) \leq 2018\beta$, eli $2017\alpha \leq \beta$, mikä on mahdotonta. Ainoa ratkaisu on siis $(x, y) = (0, 0)$.