# Lukion matematiikkakilpailun loppukilpailun ratkaisut 18.1.2019

**1.** *Ratkaise, mille luvuille $x$ on voimassa*

$$x(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) \le 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x},$$

*kun* $0 < x \le 1$.

**Vastaus.** Epäyhtälön ratkaisu on $\frac{3}{5} \le x \le 1$.

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on järjestellä epäyhtälö uudestaan ja neliöidä, jolloin saadaan kolmannen asteen epäyhtälö, joka saadaan ratkaistua.

Kun $0 < x \le 1$, niin $1-x \ge 0$ ja $1+x > 1$, joten neliöjuuret $\sqrt{1+x}$ ja $\sqrt{1-x}$ ovat määriteltyjä. Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon

$$(8x+16)\sqrt{1-x} \le (11-x)\sqrt{1+x}.$$

Molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten voidaan neliöidä puolittain ja saadan

$$(8x+16)^2(1-x) \le (11-x)^2(1+x).$$

Auki kertomisen ja sieventämisen jälkeen saadaan epäyhtälö

$$0 \le 65x^3+171x^2+99x-135. \tag{1}$$

Oikean puolen polynomin rationaaliset nollakohdat ovat tunnetun tuloksen mukaan välttämättä muotoa $\pm k/\ell$ joillain $k \mid 135, \ell \mid 65$. Kokeilemalla löydetään nollakohta $\frac{3}{5}$.

Huomataan, että epäyhtälön (1) oikean puolen $x$:n kertoimet ovat positiivisia, joten oikea puoli on aidosti kasvava $x$:n suhteen. Tästä seuraa, että epäyhtälö pätee arvosta $\frac{3}{5} \le x$ alkaen, eli arvot $\frac{3}{5} \le x \le 1$ kelpaavat.

**2.** *Kun $x$ on reaaliluku, tarkoittaa $\lfloor x \rfloor$ suurinta kokonaislukua $n$, jolle $n \le x$. Esimerkiksi $\lfloor 4{,}2 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ja $\lfloor 8 \rfloor = 8$. Todista, että luku $\lfloor (2+\sqrt{5})^{2019} \rfloor$ ei ole alkuluku.*

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on "täydentää" lukua $(2+\sqrt{5})^{2019}$ luvulla $(2-\sqrt{5})^{2019}$ ja käyttää binomilausetta.

Merkitään

$$A = (2+\sqrt{5})^{2019}, \quad B = (2-\sqrt{5})^{2019}, \quad \text{ja} \quad C = A+B.$$

Binomikaavalla näemme, että

$$C = A+B = \sum_{\ell=0}^{2019} \binom{2019}{\ell} 2^\ell (\sqrt{5})^{2019-\ell} + \sum_{\ell=0}^{2019} \binom{2019}{\ell} 2^\ell (-\sqrt{5})^{2019-\ell}.$$

Kun $2019-\ell$ on pariton, eli kun $\ell$ on parillinen, kumoavat vastaavat termit toisensa. Muussa tapauksessa vastaavat termit ovat yhtä suuret. Siten jäljelle jäävät vain parittomia indeksin $\ell$ arvoja vastaavat termit, joita jokaista esiintyy täsmälleen kaksi kappaletta, eli

$$C = 2 \sum_{\substack{0 \le \ell \le 2019, \\ 2 \nmid \ell}} \binom{2019}{\ell} 2^\ell 5^{(2019-\ell)/2}.$$

Siten $C$ on kokonaisluku ja aivan erityisesti parillinen kokonaisluku. Mutta tiedämme myös, että

$$-1 < 2 - \sqrt{5} < 0, \quad \text{mistä seuraa myös} \quad -1 < B < 0.$$

Koska lisäksi

$$C < C + (-B) = A = C + (-B) < C + 1,$$

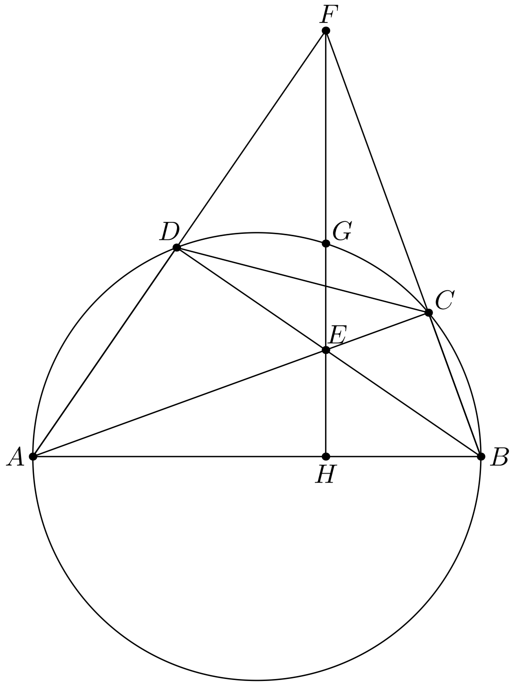
on oltava $\lfloor A \rfloor = C$. Siten $\lfloor A \rfloor$ on parillinen positiivinen kokonaisluku, joka on varmasti suurempi kuin $(2+\sqrt{5})^{2019} - 1 > 2$, ja siten se ei voi olla alkuluku.

**Kommentti.** Tehtävää voi tutkia myös *lineaaristen rekursioiden* näkökulmasta. Lineaaristen rekursoiden teorian avulla nimittäin huomataan, että jos $a_n = (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n$, niin jono $(a_n)$ toteuttaa polynomia $(x-(2+\sqrt{5}))(x-(2-\sqrt{5})) = x^2-4x+1$ vastaavan rekursioyhtälön

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n.$$

Lisäksi $a_0 = 2$ ja $a_1 = 4$. Helppo induktio antaa, että $a_n$ on parillinen kaikilla $n$. Ratkaisu viimeistellään kuten edellä.

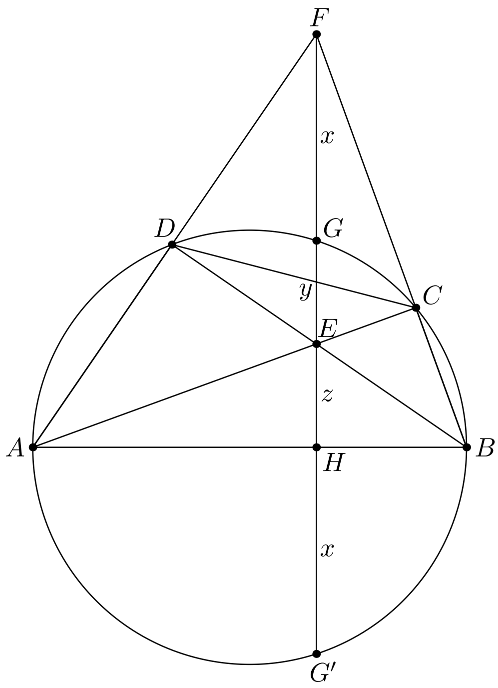
**3.** *Olkoon $ABCD$ ympyrän jännenelikulmio, jonka sivu $AB$ on samalla ympyrän halkaisija.* [Jännenelikulmio tarkoittaa nelikulmiota, jonka kärjet sijaitsevat ympyrän kehällä.] *Janat $AC$ ja $BD$ leikkaavat pisteessä $E$ ja janojen $AD$ ja $BC$ jatkeet pisteessä $F$. Jana $EF$ leikkaa ympyrää pisteessä $G$ ja janan $EF$ jatke leikkaa halkaisijan $AB$ pisteessä $H$. Osoita, että jos $G$ on janan $FH$ keskipiste, niin $E$ on janan $GH$ keskipiste.*



**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on huomata, että $FH$ on kolmion $ABF$ korkeusjana ja hyödyntää pisteen potenssia ja yhdenmuotoisia kolmioita.

Thaleen lauseen nojalla $\angle ADB$ ja $\angle ACB$ ovat suoria, joten $AC$ ja $BD$ ovat kolmion $ABF$ korkeusjanoja. Täten $E$ on kolmion $ABF$ ortokeskus, ja siten $FH \perp AB$.

Ehto $FG = GH$ motivoi lisäämään kuvioon pisteen $G$ peilauksen pisteen $H$ yli. Merkitään kuvion pituuksia seuraavan kuvan mukaisesti.




Nyt $x = y + z$. Lisäksi pisteen potenssilla pisteen $H$ suhteen

$$HA \cdot HB = x(y + z) = x^2.$$

Toisaalta $HAF$ ja $HBE$ ovat yhdenmuotoisia, mistä saadaan

$$\frac{HA}{x + y + z} = \frac{z}{HB}$$

eli

$$HA \cdot HB = z(x + y + z) = 2xz.$$

Näistä seuraa $z = x/2$ eli $y = x/2$ ja $y = z$.

**4.** *Määritellään lukujono asettamalla*

$$a_n = n^n + (n-1)^{n+1},$$

*kun $n$ on positiivinen kokonaisluku. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaislukumodulot $m$, joissa tämä lukujono on lopulta jaksollinen, ts. on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut $K$ ja $s$, että $a_k = a_{k+s} \pmod{m}$, kun $k \geq K$ on kokonaisluku.*

**Vastaus.** Lukujono on lopulta jaksollinen kaikissa positiivisissa kokonaislukumoduloissa.

**Ratkaisu.** Ratkaisu hyödyntää kiinalaista jäännöslausetta ja Eulerin lausetta.

Jaksollisuus modulo 1 on triviaali. Riittää todistaa, että jono on jaksollinen kaikissa moduloissa $p^k$, missä $p$ on alkuluku ja $k$ on positiivinen kokonaisluku, sillä väite seuraa tästä kiinalaisella jäännöslauseella.

Ensinnäkin

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n + \ell_1 p^k)^n + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n-1} \pmod{p^k}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla $\ell_1$. Lisäksi jos $\mathrm{syt}(p, n) = \mathrm{syt}(p, n-1) = 1$, niin

$$\begin{aligned} n^n + (n-1)^{n+1} &\equiv (n + \ell_1 p^k)^n + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n-1} \\ &\equiv (n + \ell_1 p^k)^{n+\ell_2\phi(p^k)} + (n + \ell_1 p^k - 1)^{n+\ell_2\phi(p^k)-1} \pmod{p^k}. \end{aligned}$$

Valitsemalla $m = \phi(p^k)p$ huomataan, että

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n + m\ell)^{n+m\ell} + (n + m\ell - 1)^{n+m\ell+1} \pmod{p^k}.$$

Mikäli toinen luvuista $n$ tai $n-1$ on luvulla $p$ jaollinen, on luvun riittävän korkea potenssi varmasti jaollinen luvulla $p^k$, jolloin tällöinkin

$$n^n + (n-1)^{n+1} \equiv (n+m)^{n+m} + (n+m-1)^{n+m+1} \pmod{p^k},$$

kun $n$ on riittävän suuri. Siis $m$ kelpaa jakson pituudeksi.

**5.** *Opettajalla tiedetään olevan $2^k$ omenaa jollakin $k \in \mathbb{N}$. Hän syö oppilaiden nähden yhden omenoista itse ja jakaa loput oppilailleen $A$ ja $B$ niin, ettei kumpikaan näe, kuinka monta toinen saa. $A$ ja $B$ eivät tunne lukua $k$. He ovat kuitenkin ennalta valinneet huomaamattoman tavan paljastaa yhdellä ainoalla merkillä toisilleen jotakin omenoiden lukumäärästä: Kumpikin raapii päätään oikealla, vasemmalla tai molemmilla käsillään saamiensa omenoiden lukumäärän mukaan. Opettajan ällistykseksi oppilaat tietävätkin aina, kumpi sai omenoita enemmän tai että opettaja söi ainoan omenan itse. Miten tämä on mahdollista?*

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on tutkia lukujen binääriesitystä ja niissä esiintyvien "muutoskohtien" määriä.

Jos $n$ on positiivinen kokonaisluku, merkitään $f(n)$:llä luvun $n$ binääriesityksen niiden kohtien määriä, joissa on peräkkäin 0 ja 1 jomminkummin päin. Esimerkiksi jos $n$ on se luku, jonka binääriesitys on $(1100010)_2$, niin

$$f(n) = 3.$$

Määritellään myös $f(0) = 0$.

Kriittinen huomio on, että jos $a + b = 2^k - 1$ ja $a > b$, missä $k > 0$, niin

$$f(a) = f(b) + 1.$$

(Jos esimerikiksi $k = 7$, $a = (1100010)_2$ ja $b = (11101)_2$, niin $f(a) = 3$ ja $f(b) = 2$.) Syy on, että tällöin $b$:n binääriesitys saadaan ottamalla $a$:n binääriesitys ja vaihtamalla nollat ykkösiksi ja toisin päin, ja alussa olevat nollat unohdetaan (mistä seuraa $f$:n arvon muuttuminen yhdellä).

Vastaavasti jos $a < b$, niin $f(a) = f(b) - 1$, ja jos $a = b = 0$, niin $f(a) = f(b)$.

Nyt jos $a$ ja $b$ ovat $A$:n ja $B$:n omenien määrät, välittävät $A$ ja $B$ pään raapimisillaan tiedon toiselle siitä, mitä ovat $f(a) \pmod 3$ ja $f(b) \pmod 3$. Edellisen nojalla näiden tietojen avulla saadaan pääteltyä, kumpi luvuista $a$ ja $b$ on suurempi (tai että päteekö $a = b = 0$).