12. 11. Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja 2013

1. Lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on $M \neq 0$. Yksi luku, a, poistetaan ja jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo lasketaan.

a) Uusi keskiarvo on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
b) Uusi keskiarvo voi olla alkuperäistä keskiarvoa pienempi.
c) Uuden keskiarvon ja luvun M erotus on $\dfrac{M-a}{n-1}$.
d) Kun lasketaan keskiarvo uudesta keskiarvosta ja luvusta M, saadaan $\dfrac{nM-a}{2(n-1)}$.

2. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään $S(n)$:llä luvun n numeroiden summaa (kymmenjärjestelmässä). Mitkä seuraavista pätevät kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n?

a) $S(3n)$ on jaollinen kolmella
b) $S(2n) \leq 2S(n)$
c) $S(2n) \geq \frac{1}{2}S(n)$
d) $S(7n)$ on jaollinen seitsemällä

3. Yhtälöllä $x^3+3ax^2+bx+c=0$ on kolme ratkaisua, jotka muodostavat aritmeettisen lukujonon. (Kolmikko on aritmeettinen lukujono, jos keskimmäinen jäsen on kahden muun keskiarvo.) Silloin varmasti

a) $ab = 2a^3 + c$
b) $a = 0$
c) $3a + c = 2b$
d) $b = 3ac$

4. Kolmiolle ABC pätee $|AB| < |AC|$. Olkoon tämän kolmion ympäri piirretty ympyrä S. Pisteestä A piirretty kohtisuora janalle BC kohtaa ympyrän S uudestaan pisteessä P. Piste X sijaitsee janalla AC, ja janan BX jatke kohtaa ympyrän S pisteessä Q. Osoita, että jos $|BX| = |CX|$, niin PQ on ympyrän S halkaisija.

5. Lautapasianssissa on käytössä yksi sininen ja kolme valkoista nappulaa, jotka pystyy sijoittamaan 2013×2013-ruudukon ruutuihin. Yksittäisellä siirrolla tartutaan yhteen nappuloista ja sitä siirretään mahdollisimman pitkälle vasemmalle, oikealle, ylös tai alas vapaana olevaan ruutuun, kunnes pelilaudan reuna tai toinen nappula tulee vastaan. Todista, että alkuasemasta riippumatta sinisen nappulan saa sopivalla siirtosarjalla pelattua mihin tahansa ruutuun.

6. Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut m ja n, että n on pariton ja yhtälö

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$$

toteutuu.