Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun välisarja

27. 10. 2015

1. Neliö, jonka sivu on a, jaetaan lävistäjän suuntaisella suoralla kahteen osaan. Osien pinta-alojen suhde on $1:4$. Neliön sisään jäävän suoran osan pituus on

a) $\dfrac{a}{2}$ b) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Kuinka monella tavalla luku 2015 voidaan esittää muodossa $p + qrs$, missä p, q, r ja s ovat kaikki alkulukuja ja $p < q < r < s$?

a) Ei yhdelläkään tavalla. b) Parittoman monella tavalla.
c) Parillisen monella tavalla. d) Korkeintaan kymmenellä eri tavalla.

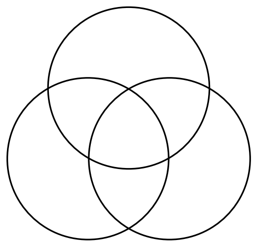
3. Olkoot $a, b, c \in [0, 1]$. Mikä on lausekkeen

$$ab + ac + bc + 1 - abc - a - b - c$$

suurin arvo?

a) 1/2 b) 1 c) 5/4 d) 3/2

4. Kolme r-säteistä ympyrää sijaitsevat niin, että jokaisen kahden keskipisteet ovat kolmannella ympyrällä. Määritä näin syntyneen kuvion piiri p ja kuvion pinta-ala A.



5. Olkoon $f\colon \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ kuvaus, jolle $f(mn) = f(m)f(n)$, kun $m, n \in \mathbb{Z}$. Osoita, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{Z}$, että $f(a) = f(a+1) = 1$.

6. Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *kupera*, jos kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $t \in [0, 1]$ pätee

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b).$$

a) Osoita, että kuperalle kuvaukselle f pätee

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \le f(a) + f(b),$$

kun $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ ja $a < b$.

b) Tutki, päteekö epäyhtälö $f(2a - b) \le 2f(a) - f(b)$ kaikille kuperille $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja luvuille $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.