



Tehtäviä on kahdella sivulla; kolme ensimmäistä tehtävää ovat monivalintatehtäviä, joissa on 0–4 oikeata vastausta.

1. Ympyräpohjaisen suoran kartion pohjan halkaisija on 2 ja myös etäisyys kärjestä pohjan reunaan on 2. Neliöpohjaisen suoran pyramidin pohjan sivu on 2 ja huipun etäisyys pohjaneliön kärjestä 2. Mitä voit sanoa tilavuuksista?

- a) Tilavuudet ovat kokonaislukuja.
- b) Tilavuuksia ei voi laskea annetuilla tiedoilla.
- c) Kappaleiden tilavuudet ovat samat.
- d) Ympyräpohjainen kartio on suurempi.

2. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät kokonaiskertoimiselle polynomille  $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ ?

- a) Se on jaoton, ts. sitä ei voi esittää alempiasteisten kokonaiskertoimisten polynomien tulona.
- b) Sillä ei ole reaalisia nollakohtia.
- c) Sen kuvaaja on symmetrinen  $y$ -akselin suhteen.
- d) Yhtälöllä  $P(x) = 7$  on rationaalinen ratkaisu.

3. Funktiolle  $f: ]0, \infty[ \rightarrow ]1, \infty[$  pätee

$$f(x) = e^{f(x)-x-1}$$

kaikilla  $x \in ]0, \infty[$ . Mitkä seuraavista väitteistä pitävät varmasti paikkaansa?

- a) Jos  $x, y \in ]0, \infty[$  ja  $x \neq y$ , niin  $f(x) \neq f(y)$ .
- b) Jos  $x \in ]0, \infty[$ , niin  $f(x) < x$ .
- c) On olemassa  $x \in ]0, \infty[$ , jolle  $f(x) = x + 1$ .
- d) Jos  $x \in ]0, \infty[$ , niin  $f(x) > x$ .

4. Aritmeettiselle jonolle  $a_1, a_2, \dots$  pätee  $\frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + d}{d}$  ja  $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ , missä  $d = a_2 - a_1$ . Määritä  $a_1$  ja  $d$ , kun oletetaan, että  $a_1$  ja  $d$  ovat samanmerkkisiä.

5. Maija pelaa seuraavaa yksinpeliä äärettömällä ruutulaudalla: Olkoon  $k$  positiivinen kokonaisluku. Maijalla on pelinappula, joka on aluksi origossa eli ruudussa  $(0, 0)$ . Nappulaa saa yhdellä siirrolla siirtää  $k - 1$  ruutua vaakatasoon,  $k$  ruutua pystysuuntaan tai  $k + 1$  ruutua vinottain. Nappulan saa siis siirtää siirrolla ruudusta  $(x, y)$  johonkin seuraavista ruuduista:

- ruutuun  $(x - (k - 1), y)$  tai ruutuun  $(x + (k - 1), y)$ ,
- ruutuun  $(x, y - k)$  tai ruutuun  $(x, y + k)$ ,
- tahi ruutuun  $(x - (k + 1), y - (k + 1))$ , ruutuun  $(x - (k + 1), y + (k + 1))$ , ruutuun  $(x + (k + 1), y - (k + 1))$  tai ruutuun  $(x + (k + 1), y + (k + 1))$ .

Maija arpoo kokonaislukupisteen eli tavoiteruudun  $(a, b)$ . Maija voittaa, mikäli hän löytää sarjan siirtoja, joilla hän pääsee ruudusta  $(0, 0)$  ruutuun  $(a, b)$ . Millä kokonaisluvun  $k$  arvoilla Maija voittaa aina riippumatta kokonaisluvuista  $a$  ja  $b$ , jos hän pelaa oikealla tavalla?

6. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^4y^2 + 2x = 2019$$

eli etsi kaikki kokonaislukuparit  $(x, y)$ , jotka toteuttavat yo. yhtälön.